

Институт теоретической и прикладной электродинамики
Российской академии наук

На правах рукописи

Мерзликин Александр Михайлович

**Мезоскопические эффекты когерентного
распространения и локализации поляризованных
электромагнитных волн в фотонных кристаллах и
неупорядоченных слоистых средах**

Специальность 01.04.13 – Электрофизика,
электрофизические установки

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2016

Оглавление

Введение	6
Глава 1. Особенности распространения света в магнитофотонных кристаллах	14
Введение	14
Влияние анизотропии магнито-фотонного кристалла на эффект Фарадея	15
Анизотропия	15
Блоховские волны	16
Магнитооптические свойства	17
Особенности магнитооптических эффектов в магнито-фотонном кристалле	19
Классификация точек с нулевой эффективной анизотропией	20
Внутризонное пересечение	20
Межзонные пересечения	25
Распространение волн в одномерном магнитофотонном кристалле с экстремальной анизотропией	26
Распространяющиеся моды.	31
Собственные моды 1D МФК.	32
Анизотропия адмитанса	37
Глава 2. Формирование поляризационно вырожденной запрещенной зоны.	39
Введение	39
Результаты численного эксперимента	43
Формирование вырожденной запрещенной зоны в рамках теории возмущений	47
Формирование запрещенных зон на бриллюэновской границе.	47
Формирование поляризационно вырожденных запрещенных зон.	51
Некоторые особенности вырожденных запрещенных зон.	57

Падение под углом к слоистой системе	59
Взаимосвязь между вырожденной и бриллюэновской запрещенной зонами и механизм формирования замороженной моды	60
Взаимосвязь между вырожденной и бриллюэновской запрещенной зонами.	62
Формирование вырожденной границы ЗЗ. Результаты численного моделирования.	65
Взаимодействие поляризационно-вырожденных запрещенных зон разного типа	70
Отсутствие эффекта Бормана на границах поляризационно-вырожденной запрещенной зоны	78
Формирование запрещенных зон в периодически намагниченном анизотропном материале	81
Управляемый электрическим полем волноводный фильтр Шольца	86
Расчет методом связанных мод.	88
Характеристики вырожденных запрещенных зон.	96
Глава 3. Оптическое таммовское состояние	99
Введение	99
Таммовские состояния	99
Случай анизотропных фотонных кристаллов	103
Таммовское состояние в СВЧ области	112
Таммовское состояние в магнитофотонных кристаллах	113
Экспериментальное наблюдение таммовского состояния.	114
Глава 4. Эффект суперпризмы в магнитофотонных кристаллах.	121
Введение	121
Эффект магнитной суперпризмы в двумерном магнитофотонном кристалле	122
Метод нахождения изочастот.	123
Зонная структура магнитооптического фотонного кристалла.	126

Влияние магнитооптики на эффект суперпризмы.	126
Эффект суперпризмы в слоистых фотонных кристаллах	132
Эффект «суперпризмы» в одномерном магнито-фотонном кристалле	141
Глава 5. Андерсоновская локализация света в магнитных и анизотропных слоистых средах.	150
Введение	150
Особенности локализации света при падении электромагнитной волны под углом к слоям системы	165
Явление Брюстера в магнито-диэлектриках	165
Распространение электромагнитных волн в случайной магнито-диэлектрической слоистой системе	168
Стохастизация поляризации электромагнитной волны в случайно-анизотропной системе	172
Андерсоновская локализация света в периодических в среднем системах на основе анизотропных компонентов	180
Глава 6. Некоторые вопросы гомогенизации уравнений Максвелла.	189
Введение	189
Теория Рытова	194
Обобщение Рытова на трехмерный случай. Подход Смита-Пендри.	203
Обобщение Рытова на трехмерный случай. Подход Аше.	209
Обобщение Рытова на трехмерный случай. Подход Сильвериньи.	210
Разделение магнитной и электрической задачи (Вуд, Ашкрофт, Дата, Крохин и др.).	212
Гомогенизация случайных сред (подход Татарского-Филькинберга и др.)	212
Теория эффективной среды.	215
Некорректность учета поправок к статическим формулам при распространении перпендикулярно слоям.	215

Отклонение в композитных материалах законов преломления от френелевских	220
Собственные решения.	222
Определение эффективного показателя преломления (блоховского волнового вектора), непрерывный случай.	226
Определение эффективного показателя преломления (блоховского волнового вектора), дискретный случай.	227
Отражение от полупространства.	229
Отражение и прохождение волны через композиционный слой.	230
Учет поверхностных токов при введении эффективных параметров	231
Аналитические свойства эффективного показателя преломления	239
Эффективный волновой вектор.	239
Аналитичность эффективного показателя преломления.	242
Самоусредняемость показателя преломления	247
Стохастизация фазы в случайно-слоистой среде.	247
Усреднение мнимой части эффективного волнового вектора.	249
Усреднение действительной части эффективного волнового вектора.	250
Самоусреднение волнового вектора.	252
Соотношение типа Крамерса-Кронинга для волнового вектора.	253
Заключение	255
Выводы	255
Список основных публикаций	261
Список литературы	265

Введение

Диссертационная работа посвящена исследованию мезоскопических эффектов, возникающих при распространении электромагнитного излучения в неоднородных структурах. В качестве таких структур выступают диэлектрические среды, как периодические, так и неупорядоченные, состоящие из различных компонентов. В качестве компонентов этих сред были рассмотрены изотропные, анизотропные и гиротропные диэлектрики. Изучение данного класса объектов представляет интерес как с точки зрения наблюдения новых фундаментальных эффектов, не проявляющихся в однородных материалах, так и с точки зрения их практического применения, в частности, в устройствах оптоэлектроники.

Актуальность темы

Современный прогресс в экспериментальных и прикладных исследованиях в первую очередь обусловлен развитием технологической базы, позволившей создавать структуры, в том числе периодические, характерные масштабы которых сравнимы или даже много меньше длины волны света. В свою очередь, бурное развитие теории распространения электромагнитных волн в неоднородных средах связано с переносом волновых явлений из квантовой теории твердого тела в электродинамику. Благодаря такому переносу в электродинамике появились теории фотонных кристаллов, диффузии света, когерентного обратного рассеяния и андерсоновской локализации света [1].

Однако, при всей схожести волновых явлений в разных областях физики, между электродинамикой и квантовой механикой есть принципиальное различие: основной объект квантовой теории – волновая функция – является скалярной величиной, в то время как электрическое и магнитное поля являются векторными величинами. В некоторых случаях это не играет важной роли, так как для наиболее распространенного случая одномерной системы изотропных слоев векторная задача всегда может быть сведена к скалярной, которая с точностью до

замены обозначений идентична квантово-механической [2]. Но при рассеянии на двумерных и трехмерных объектах или слоях из анизотропных материалов необходимо учитывать векторную природу электродинамики. Однако, до сих пор во многих работах (см. например [3, 4]), и даже в классических монографиях [1], при описании диффузии и локализации света используется скалярная, а не тензорная функция Грина. При этом наличие поляризации у электромагнитных волн приводит к существенным особенностям. Даже в слоистых системах из изотропных слоёв при падении электромагнитной волны под углом к слоям наблюдается зависимость длины локализации от поляризации падающего света [5]. Более того, в одномерных фотонных кристаллах из анизотропных компонентов (благодаря смешиванию блоховских волн разной поляризации) могут образовываться запрещенные зоны особого типа, неразрывно связанные с векторной природой электромагнитных волн [6]. Поскольку прохождение света по случайной системе, в частности, локализация света, непосредственно связано со случайным образованием береговых отражателей [7], возникает вопрос: как проявляется векторная природа электромагнитных волн при их распространении в случайных системах?

Помимо фундаментальной мотивации есть и практическая. Фотонные кристаллы предоставляют безграничные возможности управления светом, а использование электрооптических и/или магнитооптических компонент позволяет управлять распространением и поляризацией света с помощью внешних полей. В перспективе такие кристаллы могут стать ключевым элементом быстрых оптических и оптоэлектронных устройств, в том числе пространственных модуляторов (так называемых SLM и MOSLM [8]), переключателей, разветвителей и циркуляторов [9]. Кроме того, экспериментально показано, что в резонаторе на основе фотонных кристаллов может быть существенно увеличен магнитооптический отклик [10]. Однако, электрооптические материалы являются анизотропными материалами, а магнитооптические — гиротропными материалами, и поляризационные эффекты играют ключевую роль в фотонных

кристаллах, содержащих в качестве компонентов такие материалы. В свою очередь изучение неидеальности изготовления таких структур также приводит к изучению локализации света [11] в анизотропных и/или гиротропных средах.

Следует отметить, что поляризационные эффекты наблюдаются не только при резонансном рассеянии, но и в длинноволновом приближении. В течение долгого времени основным подходом для описания распространения электромагнитного излучения в неоднородных средах, характерные масштабы неоднородностей в которых много меньше длины волны, служила теория гомогенизации уравнений Максвелла. В рамках этой теории предполагается замена неоднородной среды на однородную среду с эффективными диэлектрической и магнитной проницаемостями. На этом пути главные достижения относятся к исследованиям статических полей. В частности, разработана гомогенизация уравнений Максвелла для периодических сред, составленных из материалов с положительными диэлектрическими проницаемостями, – так называемая G-конвергенция [12]. Другим не менее важным достижением было создание спектральной теории [13], позволившей свести задачу о нахождении эффективных параметров к нахождению спектральной функции. Однако вне статистики вопрос о макроскопическом описании неоднородных сред в значительной степени остается открытым. Важной составляющей этого вопроса является поиск параметров, которыми можно описывать гомогенизированную среду.

Целью диссертационной работы является разработка теории мезоскопических и поляризационных эффектов, возникающих при распространении электромагнитной волны в неоднородной среде. В частности, целью является исследование влияния поляризационных эффектов на формирование фотонных запрещенных зон и возникновение андерсоновской локализации электромагнитных волн. Одним из важных этапов этого исследования является построение теории макроскопического описания неоднородных сред при помощи эффективных параметров.

Научная новизна

- Впервые исследовано формирование запрещенных зон в магнитофотонных кристаллах, содержащих анизотропные компоненты.
- Предсказано существование оптического таммовского состояния на границе фотонного кристалла и слоя с отрицательной диэлектрической проницаемостью.
- Предсказано усиление эффекта Фарадея на частоте оптического таммовского состояния в фотонных кристаллах с магнитооптическими компонентами.
- Впервые исследовано формирование оптического аналога таммовского состояния в области СВЧ.
- Впервые исследована возможность управления таммовским состоянием и эффектом суперпризмы при помощи внешнего магнитного поля.
- Впервые исследована андерсоновская локализация света в магнитной многослойной структуре.
- Впервые исследовано влияние анизотропных компонент на андерсоновскую локализацию света.

Впервые исследованы аналитические свойства эффективного показателя преломления.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Анизотропия фотонного кристалла, подавляющая эффект Фарадея, может быть компенсирована пространственной дисперсией. В результате такой компенсации возможно значительное увеличение эффекта Фарадея.
2. В фотонном кристалле с анизотропными и магнитооптическими компонентами формируются поляризационно-вырожденные запрещенные зоны. Эти запрещенные зоны одновременно возникают для всех собственных решений (независимо от их поляризации) и соответствуют волновым векторам, лежащим внутри бриллюэновской зоны, а не на границе.

3. В системе, состоящей из одномерного фотонного кристалла и дифракционной решетки, нанесенной на поверхность фотонного кристалла, при малом изменении угла падения возможно большое изменение направления прошедшей волны – эффект суперпризмы. Если одна из компонент фотонного кристалла является магнитооптической, возможно управление эффектом суперпризмы при помощи внешнего магнитного поля.
4. Предсказано существование состояния на границе фотонного кристалла и слоя из материала с отрицательной диэлектрической проницаемостью (например, слоя золота в оптических частотах), которое является электродинамическим аналогом таммовского состояния. При наличии в системе магнитооптических компонент на частоте таммовского состояния происходит усиление фарадеевского вращения.
5. При распространении поляризованной электромагнитной волны в одномерной анизотропной случайно неоднородной среде наблюдается эффект стохастизации поляризации. Этот эффект описывается характерной длиной стохастизации, отличной от длины локализации.
6. В слоистых структурах, как в упорядоченных, так и в неупорядоченных, при увеличении количества слоев эффективный показатель преломления самоусредняется при любых длинах волн. В случае неупорядоченных слоистых структур мнимая часть волнового вектора описывает андерсоновскую локализацию света.

Практическая ценность

Показана принципиальная возможность управлять направлением распространения излучения (эффект суперпризмы) и его интенсивностью (эффект вырожденной зоны). Исследована возможность управления запрещенной зоной и оптическим таммовским состоянием посредством внешнего магнитного поля. Показана возможность создания волноводного электроуправляемого фильтра, работающего одновременно для обеих (ТЕ и ТМ) поляризаций электромагнитной

волны. Показана роль разброса осей анизотропии при распространении света в анизотропных фотонных кристаллах. Развита методика описания композитов в рамках эффективного показателя преломления.

Апробация диссертации

Основные результаты исследований, вошедшие в диссертацию, докладывались на 48 международных конференциях (в том числе 11 приглашенных докладов и два ключевых) по профилю работы.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения и списка литературы. Список литературы содержит 220 наименований. Объем диссертации составляет 284 страницы, включая 98 рисунков.

Первая глава диссертационной работы посвящена исследованию особенностей распространения электромагнитных волн в фотонных кристаллах, содержащих магнитооптические и анизотропные компоненты. Показано, что по мере распространения происходит гибридизация решений с разной поляризацией, в результате чего формируется блоховская волна, обладающая особой симметрией. При этом, на основе разработанного подхода и численного моделирования, показано, что в двумерных магнитных фотонных кристаллах существенный эффект Фарадея может наблюдаться только вблизи суперсимметричных направлений, вдоль которых волновые векторы ТМ и ТЕ волн одинаковы.

Во второй главе представленной работы исследовано формирование запрещенных зон в фотонных кристаллах содержащих магнитооптические и анизотропные компоненты. Показано существование нового типа запрещенных зон — поляризационно-вырожденных запрещенных зон, образующихся в результате брегговского взаимодействия волн разной поляризации. Кроме того, показано, что формирование так называемой замороженной моды в фотонных

кристаллах обусловлено возникновением поляризационно-вырожденной зоны. А именно - замороженная мода возникает, когда на границе поляризационно-вырожденной зоны выполнено условие брегговского отражения для мод одинаковой поляризации. Исследованы особенности поляризационно-вырожденной зоны, в том числе отсутствие эффекта Боррманна на границах такой зоны.

Третья глава посвящена исследованию эффекту суперпризмы в фотонных кристаллах. Показано, что эффект суперпризмы возможно наблюдать не только в двумерных, но так же и в одномерных фотонных кристаллах, если на их поверхность нанести дифракционную решетку. Более того, если одна из компонент фотонного кристалла является магнитооптической, то при намагничивании происходит изменение положение запрещенных зон, в результате чего эффектом суперпризмы можно управлять внешним магнитным полем.

В четвертой главе диссертации рассмотрено формирование поверхностных состояний на границе двух фотонных кристаллов или фотонного кристалла и слоя металла. Теоретически предсказано существование в таких системах состояния, являющегося электродинамическим аналогом таммовского состояния. Причем это состояние может существовать как в оптических частотах, так и в СВЧ области. Наличие в системе магнитных компонент позволяет с помощью магнитного поля управлять как поляризацией (на оптических частотах), так и частотой таммовского состояния (в СВЧ области). Также в диссертационной работе рассмотрено формирование Таммовского состояния в системе, где в одном из фотонных кристаллов формируется вырожденная запрещенная зона, рассмотренная во второй главе. В этом случае, численно показана возможность управления интенсивностью Таммовского состояния.

В пятой главе исследована андерсоновскую локализация поляризованных электромагнитных волн. В частности рассмотрено прохождение поляризованной волны по случайно-анизотропной системе. Показано, что по мере

распространения волны, функция распределения поляризации перестает зависеть от изначальной поляризации, то есть происходит стохастизация поляризации. Более того, это явление имеет характерный масштаб – длину стохастизации поляризации. Численное моделирование показало, что длина стохастизации не связана напрямую с длиной локализации, таким образом, в случайно анизотропной системе возникает дополнительный масштаб. Кроме того показано, что внесение беспорядка в анизотропные фотонные кристаллы приводит к возникновению локального максимума обратной длины локализации в разрешенной зоне невозмущенного кристалла.

Шестая глава диссертации посвящена вопросам макроскопического описания неоднородной среды при помощи эффективных параметров. Показано, что проблемы введения эффективных параметров связаны с невозможностью описания границы среды в терминах эффективного импеданса. При этом эффективный показатель преломления самоусредняется при увеличении размера системы. Поэтому основное внимание уделено свойствам эффективного показателя преломления. В частности показано, что производная эффективного волнового вектора по частоте удовлетворяет соотношениям типа Крамерса-Кронига. В случае неупорядоченных сред из них следует формула Джоноса-Хубердта-Таулесса, связывающая плотность состояний и длину локализации.

Глава 1. Особенности распространения света в магнито-фотонных кристаллах.

Введение

В последнее время широкое распространение получили задачи, посвященные взаимодействию электромагнитного поля с неоднородным веществом. Благодаря таким исследованиям создан целый класс новых материалов, где взаимодействие излучения с веществом носит резонансный характер – так называемые метаматериалы. Наиболее известным примером метаматериалов являются фотонные кристаллы (ФК). Среди различных фотонных кристаллов наибольший интерес вызывают структуры, свойствами которых можно управлять, например, магнито-фотонные кристаллы (МФК) – фотонные кристаллы, содержащие в качестве компонентов магнитооптические материалы [2, 8, 10, 14 - 32].

На данный момент всесторонне (экспериментально и теоретически) исследовано распространение электромагнитной волны в 1D фотонных кристаллах. В частности, было показано, что благодаря дисперсионным особенностям возможно значительное усиление эффекта Фарадея (на несколько порядков) [14]. Поскольку рассмотрение фотонных кристаллов малой размерности (1D) привело к такому значительному открытию, то естественный интерес представляет исследование 2D и 3D магнито-фотонных кристаллов, в которых дисперсионные особенности значительно богаче и разнообразнее.

Данная глава посвящена исследованию комплекса вопросов, связанных с распространением волны по МФК, в частности, изучению влияния пространственной неоднородности и наличия естественной анизотропии на свойства магнито-фотонного кристалла, на эффект Фарадея, на вид и поляризацию распространяющейся волны.

Влияние анизотропии магнито-фотонного кристалла на эффект Фарадея

Наиболее простым объектом, на котором можно проиллюстрировать все утверждения, является 2D МФК, образованный квадратными отверстиями (заполненными, например, воздухом) в магнитооптическом материале (см. рисунок 1). Намагничивающее поле направлено вдоль оси x , перпендикулярно оси фотонного кристалла.

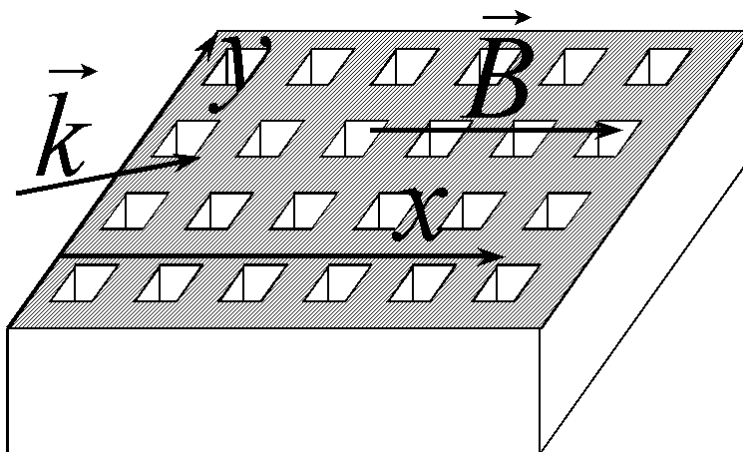


Рисунок 1 – Исследуемая структура 2D магнито-фотонного кристалла.

Волновой вектор падающей волны k лежит в плоскости xy .

Исследуемая система, 2D МФК, обладает тремя различными свойствами. Во-первых, это анизотропный материал. Не говоря уже о свойственной всем, даже кубическим [33], кристаллам анизотропии, связанной со строением элементарной ячейки, в двумерном кристалле существует выделенное направление z , что роднит его с однородными анизотропными материалами. Во-вторых, это фотонный кристалл, а, следовательно, собственными решениями являются не плоские волны, а блоховские волны, каждая из которых есть бесконечный набор плоских волн. И наконец, это материал, обладающий магнитооптическими свойствами, и в дальнейшем основное внимание будет уделено именно магнитооптическим (МО) свойствам. Все эти три свойства по-разному сказываются на электродинамических свойствах двумерных МФК, а их комбинация порождает множество интереснейших эффектов.

Анизотропия. Известно, что в одноосных анизотропных средах при распространении света перпендикулярно оси анизотропии наблюдается явление

двулучепреломления: собственные решения – плоские волны с вектором электрического поля, перпендикулярным оси анизотропии (обыкновенная волна), и с вектором электрического поля, параллельным оси анизотропии (необыкновенная волна), – имеют разные фазовые и групповые скорости.

При переходе к немагнитному двумерному фотонному кристаллу данное свойство сохраняется: собственными решениями являются ТЕ и ТМ моды, обладающие различными групповыми скоростями.

Блоховские волны. Собственные решения в ФК, согласно теореме Флоке-Блоха, имеют вид

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r})e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

где $\vec{f}(\vec{r})$ – периодическая функция с периодом кристалла.

Существующая аналогия с плоскими волнами (присутствует блоховский волновой вектор, групповая скорость) обуславливает тягу к аналогии с однородными средами, например, широко используется аппарат изочастот. Однако бесконтрольное применение этой аналогии может приводить к недоразумениям и даже ошибочным выводам.

Раскладывая функцию $\vec{f}(\vec{r})$ в ряд Фурье, блоховскую волну можно представить как сумму плоских волн, распространяющихся в направлениях, отличающихся на вектор обратной решетки. Каждая из этих волн обладает своей амплитудой, фазовой скоростью, а в МФК, как будет показано ниже, и собственной поляризацией. Общей является только групповая скорость. Для каждой из этих волн можно нарисовать свою изочастоту. Совокупность всех изочастот соответствует полной зонной структуре, изочастота волны с наименьшим волновым вектором – приведенной к первой зоне Бриллюэна зонной картине, а изочастота волны с максимальной амплитудой – расширенной зонной картине.

Проводя аналогию с плоскими волнами, часто сосредотачиваются на свойствах какой-либо одной из гармоник, забывая о других, что, как указано выше, может приводить к недоразумениям и упущениям. Например, рассматривая

расширенную зонную картину, легко упустить эффект излучения с границы кристалла, связанный с малостью минимального волнового числа в сравнении с волновым числом окружающего пространства. При этом, используя приведенную зонную картину, легко наткнуться на парадокс – наличие зонной структуры однородного вещества, упустив из виду, что амплитуда рассматриваемой гармоники в этом случае равна нулю.

Магнитооптические свойства. Рассмотрим подробнее распространение волны в магнитооптическом (однородном) одноосном кристалле. Пусть ось z – ось анизотропии, тогда расположим намагничивающее поле параллельно оси x . В этом случае кристалл описывается тензором диэлектрической проницаемости, который равен

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & i\alpha \\ 0 & -i\alpha & \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Введём вектор $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{(\omega/c)}$ и воспользуемся уравнением Френеля [34] в общем виде

$$\det \left| n^2 \delta_{kl} - n_k n_l - \varepsilon_{lk} \right| = \begin{vmatrix} n_y^2 - \varepsilon_1 & -n_x n_y & 0 \\ -n_x n_y & n_x^2 - \varepsilon_1 & -i\alpha \\ 0 & i\alpha & n^2 - \varepsilon_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ где } n^2 = n_x^2 + n_y^2.$$

После очевидных преобразований получим

$$\varepsilon_1 (n^2 - \varepsilon_2) (n^2 - \varepsilon_1) - \alpha^2 (n_y^2 - \varepsilon_1) = 0,$$

в отсутствие намагничивающего поля:

$$(n^2 - \varepsilon_2) (n^2 - \varepsilon_1) = 0,$$

чему соответствуют две изочастоты в виде кругов, для ТЕ и ТМ мод. При включении магнитного поля наибольшее изменение изочастоты (и, как следствие, наибольший эффект Фарадея) будет наблюдаться при распространении волны вдоль намагничивающего поля. В этом случае $n_y = 0$ и, следовательно,

$$n^2 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2 + \alpha^2}.$$

Таким образом, сдвиг между изочастотами в направлении поля обусловлен как анизотропией – $\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2$, так и влиянием магнитооптики – α^2 .

Магнитооптический параметр, как правило, является малой величиной, в этом случае

$$n^2 \approx \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \pm \frac{\alpha^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2},$$

иными словами $n \approx \begin{cases} \sqrt{\varepsilon_1} + \frac{\alpha^2}{2\sqrt{\varepsilon_1}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \\ \sqrt{\varepsilon_2} - \frac{\alpha^2}{2\sqrt{\varepsilon_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \end{cases}$, то есть

$$\Delta n = \frac{\alpha^2}{2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})},$$

в то время как в однородном веществе (при $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$)

$$\Delta n = 2\alpha.$$

Если $\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2 \ll \alpha^2$, то картина близка к изотропному случаю и наблюдается существенный эффект Фарадея.

В случае $\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2 > \alpha^2$ при фиксированной толщине образца можно

говорить об эффекте Фарадея как о зависимости угла поворота поляризации от величины магнитного поля. Но эффект Фарадея значительно уменьшается, если рассматривать зависимость угла поворота плоскости поляризации от толщины образца. Этот угол в большей степени определяется анизотропией. Так как уже без намагничивающего поля есть разворот поляризации, обусловленный анизотропией, эффект Фарадея будет заключаться в дополнительном развороте поляризации прошедшей волны по отношению к ненамагниченному случаю [35].

Несложно заметить, что величина этого эффекта пропорциональна дополнительному набегу фаз, возникающему за счет изменения изочастоты при наложении намагничивающего поля [36].

Особенности магнитооптических эффектов в магнито-фотонном кристалле

Как отмечено выше, фотонный кристалл проявляет в себе множество разных свойств. Начнём изучение фотонных кристаллов с области малых частот, когда расширенная картина изочастот находится в первой зоне Бриллюэна и изочастота далека от границы зоны [6]. В этом случае амплитуды остальных гармоник близки к нулю и блоховскую волну можно характеризовать свойствами гармоник с максимальной амплитудой. Как и в случае одноосного однородного вещества, наложение магнитного поля приводит к тому, что вместо линейной поляризации волна будет обладать эллиптической поляризацией. Таким образом, задача распространения волны в МФК сводится к задаче распространения волны в магнитооптическом одноосном кристалле. Действительно, ввиду малости магнитооптического параметра, отличие изочастот при наложении намагничивающего поля мало.

В пределе малых частот, пренебрегая пространственной дисперсией, корректно рассматривать лишь изочастоты в виде окружностей (в пределах отклонения на магнитооптические эффекты), так как учёт искривления изочастоты за счёт неоднородности фотонного кристалла являлся бы превышением точности. Однако, как показали расчёты и как это будет продемонстрировано далее, сделанные качественные оценки роли анизотропии могут быть вполне применены и к общему случаю. При этом в общем случае нужно учитывать, что в разных направлениях «эффективная» анизотропия (различие волновых чисел у разных волн) разная.

При увеличении частоты и выходе изочастоты расширенной картины из первой зоны Бриллюэна последнее обстоятельство может привести к возникновению точек с нулевой эффективной анизотропией, т.е. направлений, где

волновые числа совпадают. Именно в этих направлениях следует ожидать проявление заметных МО свойств.

Классификация точек с нулевой эффективной анизотропией

Возможны случаи, когда совпадают волновые числа одинаковых по номеру гармоник. Кроме этого случая возможна ситуация, когда блоховский вектор для гармоники с одним номером окажется равным блоховскому вектору для гармоники с другим номером. В этом случае, так же как и в предыдущем, для каждой гармоники из блоховской ТЕ волны будет существовать гармоника из ТМ волны, имеющая такой же волновой вектор. Этому случаю будут отвечать пересечения ТЕ и ТМ изочастот в сверхрасширенной картине изочастот, причём такие пересечения, которых нет в расширенной картине, то есть пересечения между частями, находящимися в разных зонах Бриллюэна и совпавших лишь благодаря сдвигу на обратный вектор решётки. Поскольку волновые векторы, соответствующие блоховскому вектору и отвечающие главным гармоникам, будут направлены существенно в разные стороны, то и групповые скорости для ТЕ и ТМ волн будут иметь существенно разные направления, и наблюдать эффект Фарадея будет затруднительно.

Таким образом, есть две принципиальные возможности, когда волновые векторы для гармоник из ТЕ и ТМ волн совпадают. Первый случай, когда совпадают волновые векторы для главных гармоник, будем называть внутризонным пересечением изочастот. Второй, когда блоховские векторы не совпадают, будем называть межзонным пересечением.

Внутризонное пересечение. Расчёты показывают, что в первой зоне Бриллюэна при наблюдаемых параметрах нет условий для реализации «нулевой эффективной анизотропии».

Рассмотрим вторую зону Бриллюэна. Численный эксперимент показывает, что в отсутствие магнитного поля изочастоты для ТЕ и ТМ поляризаций не имеют

самопересечений, однако возможна ситуация, когда ТЕ изочастота пересекает ТМ изочастоту. На рисунке 2 изображен как раз такой случай.

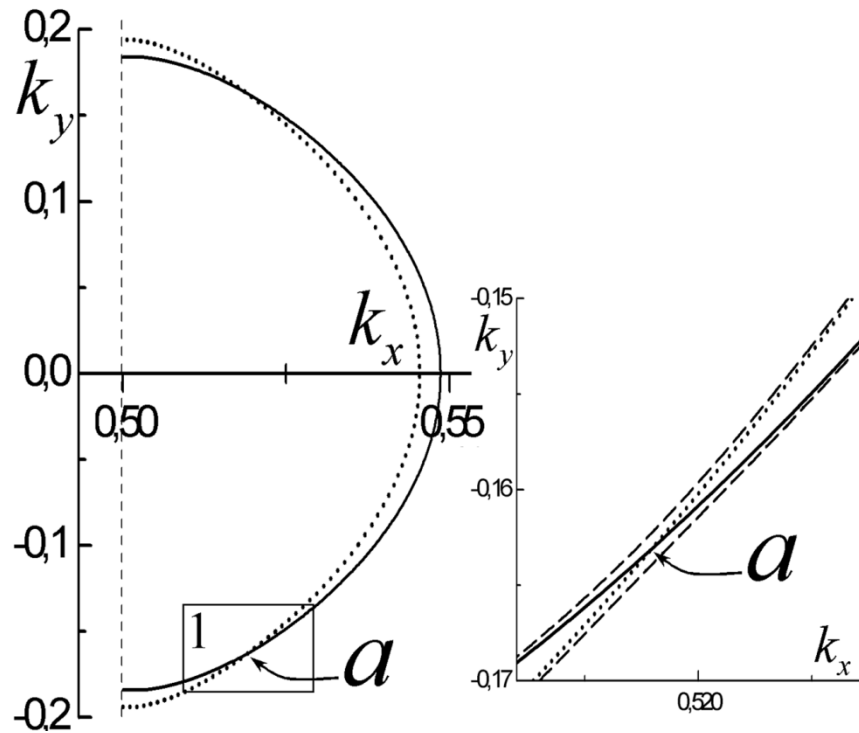


Рисунок 2 – Внутризонное пересечение изочастот. Диэлектрическая проницаемость матрицы $\varepsilon = 1.7$, $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$, диэлектрическая проницаемость второй компоненты ФК $\varepsilon = 2.5$, $k_0 d / 2\pi = 0.4$. Сплошная и точечная линии показывают изочастоты ТЕ и ТМ немагниченного ФК. Пунктирная линия соответствует изочастотам намагниченного ФК.

Изочастоты, находящиеся во второй зоне Бриллюэна, имеют точку пересечения. В данном случае две главные гармоники для ТЕ и ТМ волн распространяются с одинаковыми волновыми векторами и в одинаковом направлении. Поскольку все остальные волновые векторы отличаются от данных прибавлением и вычитанием обратных векторов решетки, то это означает, что две гармоники для ТЕ и ТМ волн с одинаковыми номерами будут также иметь одинаковые волновые векторы. Однако, в рассматриваемой расширенной зонной картине групповая скорость составляет небольшой угол с блоховским вектором. Более того, несмотря на то, что все соответствующие гармоники для ТЕ и ТМ волн распространяются с одинаковыми волновыми векторами, групповые скорости для ТЕ и ТМ волн

направлены под углом друг к другу. Это связано с тем, что в ТЕ и ТМ блоховские волны эти гармоники (с одинаковыми волновыми векторами) входят с разными коэффициентами. Данный угол не велик (порядка 1 градуса) и, безусловно, в такой системе можно наблюдать эффект Фарадея.

Рассмотрим подробнее часть изочастот ТЕ и ТМ волн, выходящих за первую зону Бриллюэна. Видно, что у изочастот ТЕ и ТМ есть точка пересечения. Эффективно можно говорить, что в этой точке (в этом направлении) фотонный кристалл является изотропным.

При наложении намагничивающего поля (см. рисунок 2) происходит расщепление решений. Причём отклонение изочастот тем больше, чем ближе к точке с нулевой эффективной анизотропией. В этой области разница волновых векторов (и, соответственно, величина эффекта Фарадея) порядка α . Вдали же от точки нулевой анизотропии отклонение изочастот порядка α^2 .

Несмотря на то, что волновые векторы одинаковы, групповые скорости тем не менее не сонаправлены. Угол между ними составляет порядка градуса, и для того чтобы лучи разошлись на период они должны пройти 100 периодов, при этом апертура падающий луч (для того, чтобы проявились фотонные свойства кристалла) должна быть значительно больше периода. Поэтому это как раз тот случай, когда несмотря на различие направлений групповых скоростей эффект Фарадея все же существует. Более того, после наложения магнитного поля угол между групповыми скоростями уменьшается до нуля.

Поскольку в данном случае возможен заметный эффект Фарадея, особый интерес представляет поляризация распространяющейся волны. Как отмечено ранее, блоховская волна представляет собой бесконечную сумму плоских волн. В случае, когда нет намагничивающего поля, есть два решения – ТЕ и ТМ волны, то есть в отсутствие намагничивающего поля все гармоники одной волны ТЕ поляризованы, а другой – ТМ поляризованы. Оказывается, что при наложении даже маленького магнитного поля ситуация существенно осложняется: каждая гармоника несёт собственную поляризацию, причём в блоховской волне

присутствуют как гармоники право поляризованные, так и лево поляризованные (см. рисунок 3). Таким образом, в отличие от не намагнитного случая, в общем случае невозможно говорить о полной поляризации блоховской волны. Такие решения будут называться гибридными.

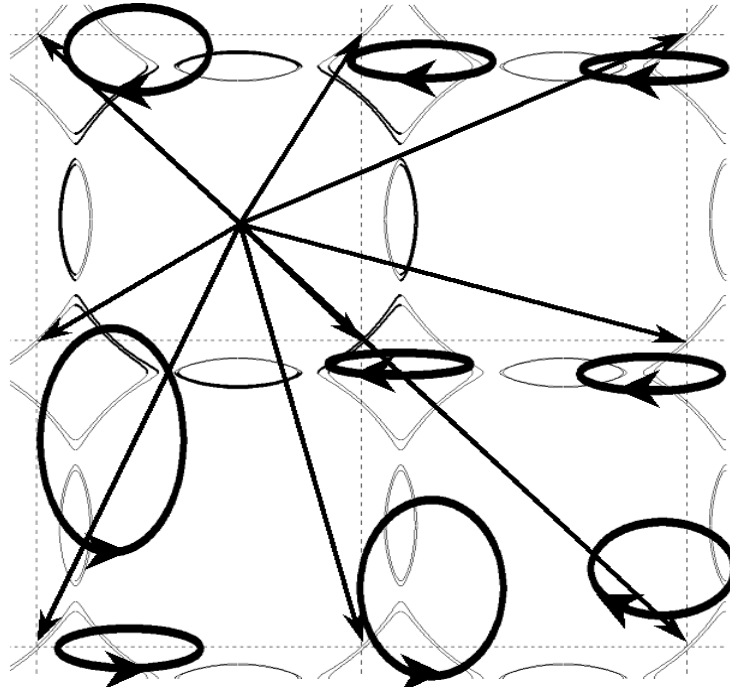


Рисунок 3 – Расширенная зонная картина изочастот (серые кривые) намагнитенного ФК. Стрелки обозначают блоховские векторы (отличающиеся друг от друга на векторы обратной решетки). Эллипсы у концов блоховских векторов показывают поляризацию плоской гармоники, соответствующей каждому вектору.

Каждая отдельная гармоника имеет собственный эллипс поляризации, общим для всех гармоник является то, что оси эллипса не наклонены, а ориентированы вдоль (и, соответственно, перпендикулярно) оси фотонного кристалла. Но эксцентриситет эллипса и направление вращения поляризации для всех гармоник разные. При малых значениях недиагональной компоненты диэлектрической проницаемости α и вдали от внутризонных точек пересечения отклонение изочастоты (отвечающей намагнитенному случаю от соответствующей ненамагнитенной) мало, и эллипсы поляризаций преимущественно вытянуты вдоль соответствующих поляризаций, однако, с разным направлением вращения поляризации. То есть, например, вдали от точки

пересечения и вблизи от ТЕ моды эллипсы преимущественно вытянуты вдоль оси z , а вдали от точки пересечения и вблизи от моды ТМ эллипсы вытянуты в плоскости xu (и по мере уменьшения α эллипсы вырождаются в соответствующие моды). Следовательно (что подтверждается расчётами) при малых α вблизи точки пересечения для каждой гармоники есть область, где она циркулярно поляризована. Но для каждой гармоники это своя область, и поэтому нет точки, в которой все гармоники, а тем самым и вся блоховская волна была бы циркулярно поляризована.

При включении магнитного поля главные гармоники становятся разно поляризованными, одна – право поляризованной, другая – лево поляризованной. При небольших значениях α точки, где главные гармоники циркулярно поляризованы, близки. Таким образом, при удачном выборе угла среза фотонного кристалла, частоты и других параметров, так чтобы из фотонного кристалла в вакуум могла выйти лишь главная гармоника, в МФК возможно наблюдение эффекта Фарадея.

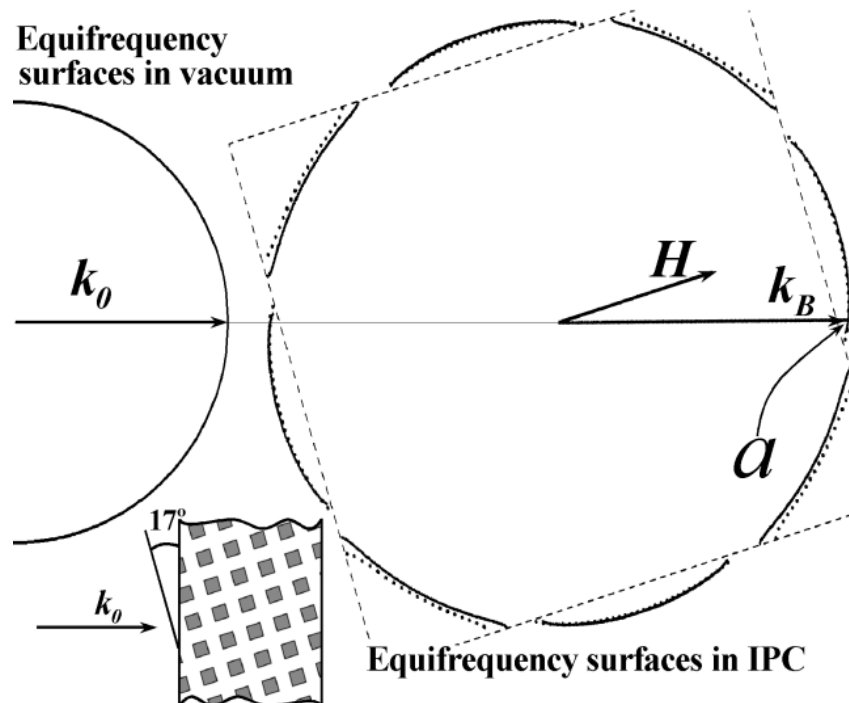


Рисунок 4 – Геометрия, позволяющая наблюдать значительный эффект Фарадея.

Параметры структуры такие же, как и на рисунке 2. Точка a показывает пересечение изочастот для ТЕ и ТМ блоховских волн.

При выборе реальных параметров усиление эффекта мало (либо отсутствует вовсе), что связано, с одной стороны, с дисперсионными особенностями вблизи точек внутризонного пересечения, с другой стороны, с тем, что при сечении кристалла под малыми углами начинает (за счёт эффекта Бормана) возбуждаться множество дополнительных блоховских волн, которые «портят» наблюдение эффекта. Данные проблемы частично снимаются введением искусственной анизотропии включений. За счёт введенной анизотропии можно и понизить анизотропию магнитооптического кристалла (тем самым, как было показано ранее, увеличить эффект Фарадея), и при этом переместить точку пересечения изочастот в удобную область. Однако и в таком случае надеется на значительное усиление эффекта Фарадея, сравнимое с усилением в плёночных структурах, не приходится.

Межзонные пересечения. Кроме описанного выше внутризонного пересечения возможен еще случай межзонного пересечения, когда, например, ветвь TE изочастоты из третьей зоны Бриллюэна пересекает ветвь изочастоты TM из второй зоны Бриллюэна. Как уже отмечалось ранее, в этом случае волновые векторы, соответствующие главным гармоникам, уже не совпадают, совпадая при этом с волновыми векторами боковых гармоник. В этом случае нет пересечений в расширенной картине, но есть пересечения в сверхрасширенной или в картине, приведённой в первую зону. Для простоты будем рассматривать приведение в первую зону Бриллюэна. Пример описываемого пересечения представлен на рисунке 5.

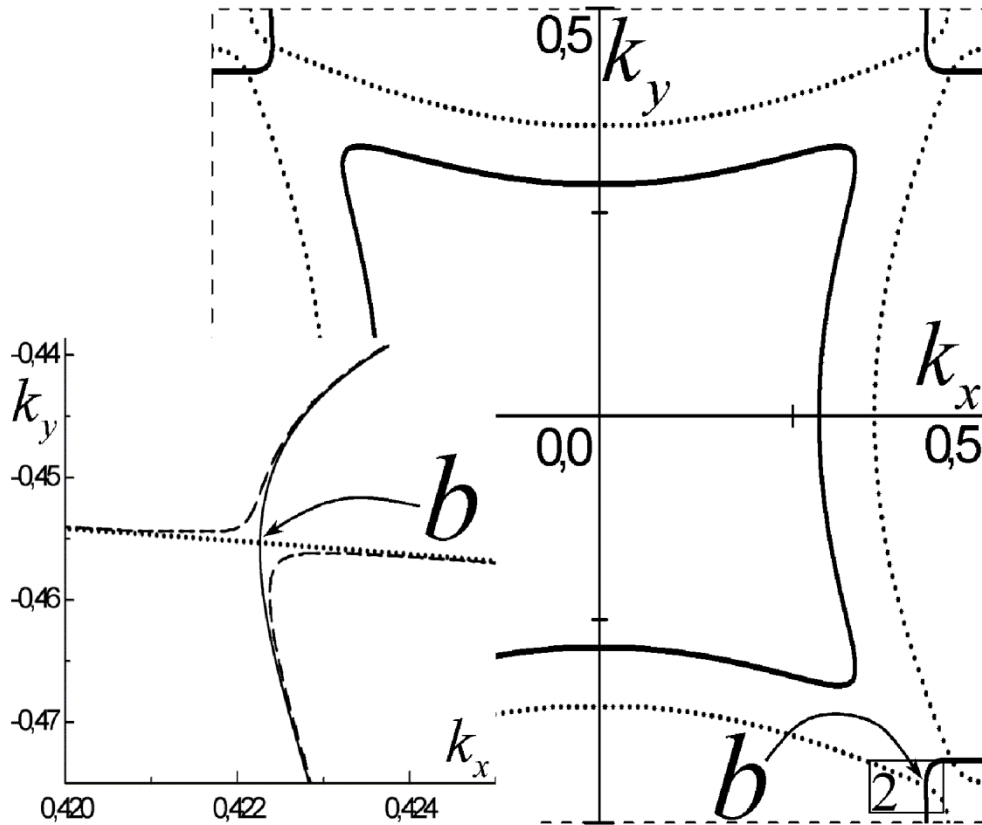


Рисунок 5 – Приведенная в первую зону Бриллюэна картина изочастот. Точка b показывает пересечение изочастот для ТЕ и ТМ блоховских волн. Проницаемость магнитооптической матрицы $\varepsilon = 7.0$ и $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$, диэлектрическая проницаемость второй компоненты $\varepsilon = 1.0$. Частота соответствует $k_0 d / 2\pi = 0.35$. Сплошная и точечная линии показывают изочастоты ТЕ и ТМ ненамагниченного ФК. Пунктирная линия соответствует изочастотам намагниченного ФК.

На вкладке рисунка 5 показано, как пере замыкаются изочастоты при наложении магнитного поля. В этом случае, в отличие от предыдущего внутризонного пересечения, волновые векторы главных гармоник не совпадают, поэтому в точке пересечения групповые скорости для ТЕ и ТМ блоховских волн направлены в существенно разные стороны (как видно, угол между групповыми скоростями порядка 90°). Таким образом, в случае межзонного пересечения наблюдать эффект Фарадея затруднительно.

Итак, несмотря на наличие естественной анизотропии 2D фотонных кристаллов, показано, что благодаря пространственной дисперсии есть точки – точки нулевой эффективной анизотропии, – где величина эффекта Фарадея

существенна. Таким образом, при определенных условиях, сочетание всех трех свойств 2D МФК – анизотропии, пространственной дисперсии и МО – приводит к возникновению эффекта Фарадея.

Распространение волн в одномерном магнитофотонном кристалле с экстремальной анизотропией

Несмотря на кажущуюся простоту одномерных фотонных кристаллов, исследованию именно этих структур посвящена большая часть исследований, связанных с фотонными кристаллами. Основные усилия в изучении 1D ФК в первую очередь связаны с изучением влияния свойств компонентов этого ФК на его дисперсионные свойства, в частности, на зонную структуру. В этой связи рассматривают ФК, компонентами которых являются различные киральные, гиротропные (в оптике преимущественно магнитооптические) и анизотропные материалы, а также диэлектрики с отрицательной диэлектрической и/или магнитной проницаемостями.

В данном разделе будет исследовано влияние сильной локальной анизотропии на распространение электромагнитных волн в 1D МФК. Наиболее ярко анизотропия выражена в диэлектрической среде, диэлектрический тензор которой (взятый в координатах главных осей) содержит как положительные, так и отрицательные числа. В этом случае в кристалле распространяются только поляризации, соответствующие положительным компонентам тензора диэлектрической проницаемости.

В природе не существует естественных сред, описывающихся таким тензором диэлектрической проницаемости. Поэтому в качестве такой среды может быть рассмотрен композиционный материал, например, это может быть нанопористый Bi:YIG, поры которого заполнены серебром.

Рассмотрим магнитооптическую анизотропную среду. Тензор диэлектрической проницаемости в системе координат $\{x, y, z\}$ будет иметь вид [35],

$$\hat{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & i\alpha & 0 \\ -i\alpha & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

При этом пусть $\varepsilon_2 < 0$, $\varepsilon_1 > 0$ ¹.

Для начала найдем распространяющиеся моды в такой среде вдоль оси z . Соответствующее уравнение Френеля $\det(k_0^2 \hat{\varepsilon} + k_i k_j - \delta_{i,j} k^2) = 0$ приводит к уравнению

$$n^4 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)n^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \alpha^2 = 0, \text{ где } n = k/k_0, k_0 = \frac{\omega}{c},$$

решением которого (как и в случае обыкновенного МО и анизотропного вещества) является

$$n^2 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2 + \alpha^2}. \quad (2)$$

Поскольку $\varepsilon_2 < 0$, то стоящее под знаком корня выражение всегда больше, чем $\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right)^2$. Следовательно, одна мода – распространяющаяся ($n^2 > 0$), а другая – экспоненциально убывающая ($n^2 < 0$).

Для рассмотрения поляризации собственных мод такого материала, удобно воспользоваться малостью магнитооптического параметра $\alpha \ll |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$.

Распространяющаяся мода:

$$k_{z1}/k_0 \approx \sqrt{\varepsilon_1 + \frac{\alpha^2}{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}} \quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}_1 \approx \begin{pmatrix} \alpha \\ i|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \end{pmatrix}, \quad (3a)$$

затухающая мода:

$$k_{z2}/k_0 \approx \sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\alpha^2}{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}} \quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}_2 \approx \begin{pmatrix} i|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \alpha \end{pmatrix}. \quad (3b)$$

¹ Вообще говоря, для известных анизотропных магнитооптических материалов диагональные компоненты тензора ε_1 и ε_2 являются величинами одного знака. Однако вид данного тензора не противоречит законам электродинамики (соотношению Крамерса-Кронинга и условию на кинетические коэффициенты), поэтому представляется возможным создание такого материала.

Распространяющаяся мода (3а) – это право-эллиптически поляризованная волна с большой эллиптичностью в силу малости магнитооптического параметра.

С затухающей модой (3б) ситуация обстоит более сложно. Поскольку решение является экспоненциально затухающим, с чисто мнимым волновым вектором, то (в отличие от распространяющихся эллиптически поляризованных решений) по мере затухания не происходит увеличения фазы этой волны и нельзя сказать, что x - компонента поля опережает y -компоненту на фазу $\pi/2$. То есть в любой момент времени направление электрического поля во всей затухающей моде (так же как и в линейно поляризованной волне) одинаково. Но это направление (в отличие от линейно поляризованной волны) определяется временным множителем, стоящим перед решением, то есть $e^{ik_0 t}$. Иными словами, несмотря на то, что в каждый момент времени во всех точках пространства затухающая мода имеет одинаковую поляризацию, направление этой поляризации крутится во времени, описывая эллипс. Поэтому, несмотря на то, что в любой фиксированный момент времени затухающая мода имеет одинаковую поляризацию во всех точках пространства, эту моду можно считать затухающей лево-эллиптически поляризованной волной с большой эллиптичностью.

Важно отметить, что если в рассматриваемый материал ввести даже небольшое поглощение (по сравнению с магнито-оптическим параметром), то это приведет к возникновению действительной части в волновом векторе и, как следствие, к тому, что затухающее решение станет переносить фазу. В этом случае x - компонента поля станет опережать y -компоненту на фазу $\pi/2$ и затухающая мода превратится в привычную лево поляризованную волну, в которой (в фиксированный момент времени) направление поляризации поля меняется вдоль волнового вектора (его действительной части).

Разобравшись с собственными модами материала, описываемого тензором (1), можно перейти к описанию МФК, созданного на базе такого материала.

Известно, что естественная анизотропия уменьшает и без того малые МО эффекты [18, 35]², поэтому желательно использовать структуру 1D ФК с целью уменьшения негативного влияния анизотропии на МО свойства.

В предыдущем разделе было показано, что влияние локальной анизотропии не подавляет МО свойства в направлениях «эффективной изотропии», то есть в направлениях, в которых для немагнитного ФК оба решения с различными поляризациями имеют одинаковые волновые векторы³. Таким образом, для того, чтобы МО свойства не были подавлены локальной анизотропией, слои нужно расположить так, чтобы в отсутствие намагнитченности перпендикулярное слоям направление было направлением эффективной изотропии. Например, это можно сделать, развернув соседние слои на $\varphi = 90^\circ$ друг к другу (см. рисунок 6) относительно оси z .

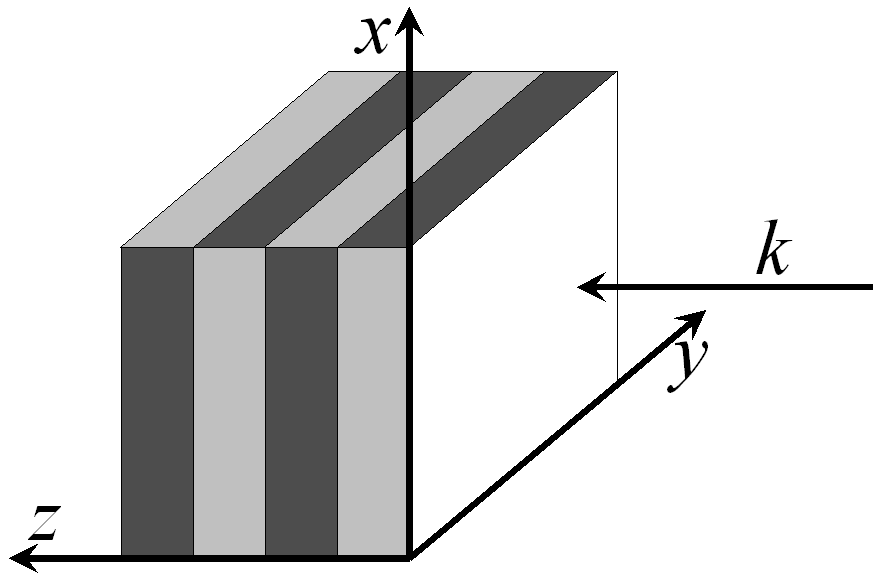


Рисунок 6 – Изучаемая система.

Если диэлектрическая проницаемость первого слоя описывалась тензором (1)

² В реальных МО материалах МО параметр α является чрезвычайно малой величиной. Если разложить (3) по этому малому параметру, то окажется, что МО свойства уменьшены из-за влияния анизотропии.

³ На языке изочастот направление «эффективной изотропии» определяется точками пересечений изочастот, отвечающих разным поляризациям.

$$\hat{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & i\alpha & 0 \\ -i\alpha & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{vmatrix},$$

то диэлектрическая проницаемость второго слоя (в соответствии с правилами преобразования тензоров второго порядка) будет описываться

$$\hat{\varepsilon}_r = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{vmatrix} \hat{\varepsilon} \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \varepsilon_2 & i\alpha & 0 \\ -i\alpha & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{vmatrix}.$$

В данной системе в направлении, перпендикулярном слоям, ярко выражена локальная анизотропия: в каждом из слоев может распространяться лишь одна поляризации, в то время как другая поляризация подавлена. Однако при этом для ненамагниченного ФК направление нормали к слоям – это направление «эффективной изотропии». Действительно, для ненамагниченного ФК две моды, поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях (вдоль осей x и y), отличаются друг от друга сдвигом лишь на один слой, а, следовательно, обладают одинаковыми блоховскими векторами. Таким образом, рассматриваемая система – это система с сильной локальной анизотропией, которая, однако, согласно [18] не должна подавлять МО свойства.

Распространяющиеся моды. Обратимся теперь к детальному изучению распространяющихся мод в таком анизотропном магнитофотонном кристалле. При беглом взгляде на данный МФК может возникнуть две интуитивно очевидных гипотезы, которые, однако, противоречат друг другу.

С одной стороны, всё просто: только право-поляризованная волна является распространяющейся в обоих слоях, поэтому только право-поляризованная волна должна распространяться вдоль всего ФК.

С другой стороны, поскольку в отсутствие намагничивающего поля для двух взаимно перпендикулярных поляризаций (вдоль осей x и y), свойства кристалла отличаются лишь сдвигом на один слой, то оба решения (E поляризовано вдоль x и E поляризовано вдоль y) распространяются с одинаковыми блоховскими векторами. То есть, либо обе поляризации

распространяются, либо обе поляризации экспоненциально затухают. В данном случае они обе распространяются. Действительно, в длинноволновом пределе $\lambda \rightarrow \infty$ показатель преломления (в отличие от импеданса) гомогенизуется [37] и для обеих волн равен $n = \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$, где $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$. Поскольку ожидается, что при намагничивании этот показатель преломления будет вести себя непрерывным образом, то ожидается, что возникнет две волны, распространяющиеся с разными показателями преломления, отличными от $n = \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ в меру намагниченности. Таким образом, в намагниченном МФК должны распространяться две моды.

Для разрешения этого парадокса, то есть для того, чтобы определить, сколько в действительности мод может распространяться по такому кристаллу, необходимо найти дисперсионную зависимость в нем.

Собственные моды 1D МФК. Для нахождения дисперсионной зависимости можно воспользоваться методом Т-матриц [6, 38], используя Т-матрицы, связывающие тангенциальные компоненты полей по разные стороны от слоя:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ H_y \\ E_y \\ H_x \end{pmatrix}_{left} = T \begin{pmatrix} E_x \\ H_y \\ E_y \\ H_x \end{pmatrix}_{right}.$$

Т-матрица периода системы представляет собой произведение двух Т-матриц слоёв. Поскольку собственное решение при прохождении по периоду изменяется лишь на соответствующую фазу, то после приведения Т-матрицы периода к диагональному виду $T = SJS^{-1}$ матрица J будет иметь вид матрицы распространения:

$$J_n = \begin{pmatrix} e^{ik_1L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ik_2L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_3L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{ik_4L} \end{pmatrix},$$

где k_i – искомые блоховские волновые векторы. Таким образом, будет четыре собственных волновых числа, определяемых четырьмя собственными значениями

e^{ikL} , где L – период МФК. В общем случае, для нахождения собственных значений матрицы T нужно решить соответствующее характеристическое уравнение $\det|T_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$, являющееся уравнением 4-ой степени.

Однако в рассматриваемом случае можно упростить эту задачу [16]. Действительно, ячейка кристалла состоит из двух слоёв, и такая система инвариантна относительно отражения от плоскости, параллельной слоям и помещенной посередине одного из слоев. Следовательно, (в отличие от случая спектральной асимметрии [39, 40]) волновые векторы имеют вид $\pm k_1$, $\pm k_2$, и характеристическое уравнение сводится к

$$\lambda^4 - a\lambda^3 + b\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0, \quad (4)$$

где

$$a = \sum_{i=1}^4 T_{ii} \text{ и } b = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^4 [T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}]$$

являются инвариантами, не зависящими от представления T -матриц. Вычислив T -матрицу периода, можно найти эти инварианты.

С другой стороны, поскольку характеристическое уравнение (4) инвариантно относительно приведения матрицы к жорданову виду, подставив вместо T -матрицы J , получим

$$\begin{cases} \text{Tr}(T) = \sum_{i=1}^4 T_{ii} = 2(\cos(k_1 2d) + \cos(k_2 2d)) \\ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^4 [T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}] = 2 + 4\cos(k_1 2d)\cos(k_2 2d) \end{cases} \quad (5)$$

Уравнения (5) являются обобщением хорошо известного дисперсионного уравнения $\text{Tr}(T) = 2\cos(k_{Bl} 2d)$ (см. [41]). Решая эти уравнения, можно найти дисперсионную зависимость.

Расчет показывает (см. рисунок 7), что включение магнитного поля приводит к появлению двух решений с разными волновыми векторами. Таким образом, оправдывается вторая гипотеза. Однако возникает естественный вопрос:

откуда берется второе решение, если в каждом слое может распространяться лишь одна право-поляризованная мода? и каковы поляризации найденных решений?

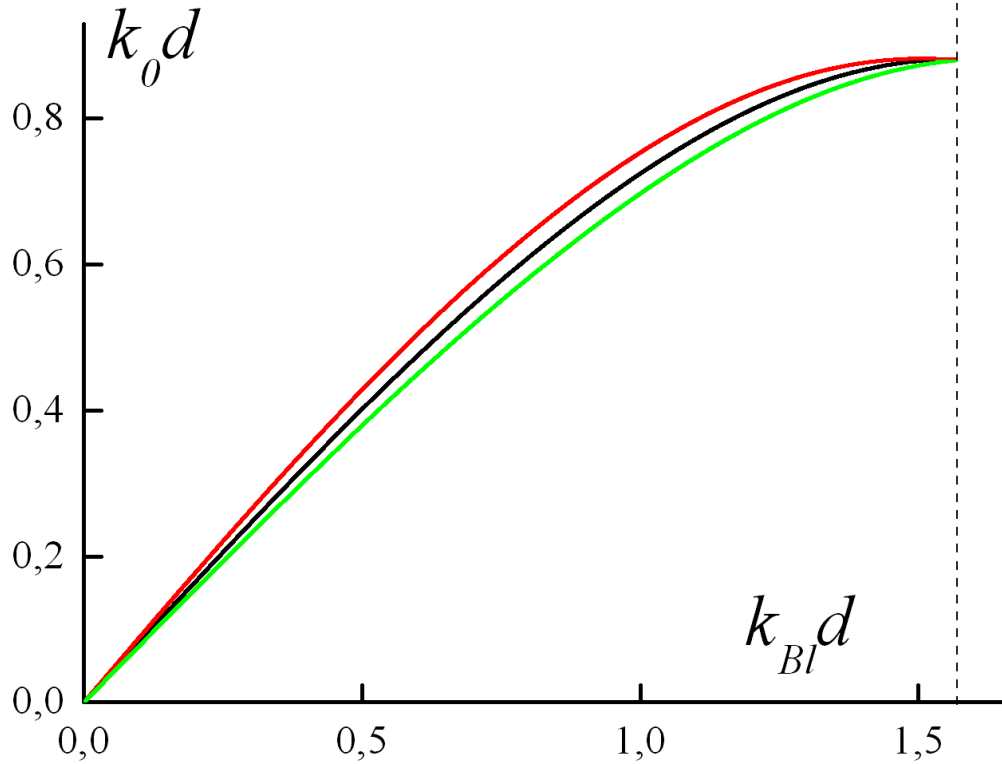


Рисунок 7 – Дисперсионная зависимость частоты k_0 от блоховского вектора k_{Bl} (в толщинах слоя d). Параметры $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = -1$, $\alpha = 0.2$. Черная кривая соответствует немагниченному случаю ($\alpha = 0$), серые – двум разным поляризациям намагниченного ФК.

Есть две возможности:

- 1) либо, как в обыкновенном 1D магнитофотонном кристалле, одна блоховская волна образованна за счет право-поляризованных волн, а другая – за счет лево-поляризованных волн. В этом случае лево-поляризованная блоховская волна будет состоять из экспоненциально убывающих и экспоненциально растущих участков, соответствующих лево-поляризованной моде⁴, и для этой блоховской функции должны наблюдаться максимумы поля на границе между слоями.
- 2) либо обе блоховские волны являются смешанными. То есть право-поляризованные моды и левополяризованные моды на границе слоев

⁴ Аналогичная ситуация наблюдается для линзы Алю-Инжеты [42].

смешиваются за счет граничных условий, и обе блоховские волны состоят как из распространяющихся право-поляризованных мод, так и из затухающих лево-поляризованных мод. Аналогичная ситуация возникает при образовании гиротропной вырожденной зоны [16, 18].

Расчет поля показывает (см. рисунок 8), что ни одна из мод не имеет максимумов поля на границе, следовательно, реализуется вторая возможность, то есть оба решения являются смешанными.

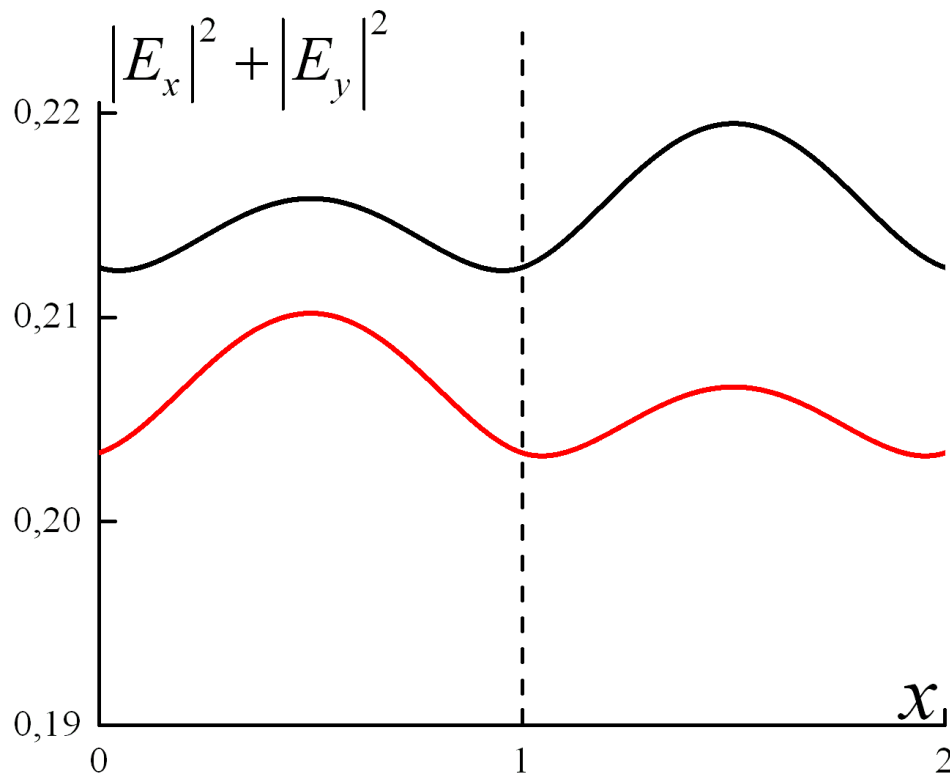


Рисунок 8 – Распределение электрического поля на периоде ФК. Параметры $\varepsilon_1 = 5.9$, $\varepsilon_2 = -1.3$, $\alpha = 0.2$. Ось x выражена в толщине слоя.

Обратим внимание на то, что для обоих решений в центрах обоих слоев наблюдаются максимумы поля. Следовательно, в образовании обоих блоховских решений в каждом слое участвуют распространяющиеся право-поляризованные моды. Действительно, в противном случае в каком-нибудь слое была бы сумма возрастающей и убывающей экспонент и, соответственно, минимум поля.

Любопытно отметить, что абсолютные максимумы поля для разных решений лежат в разных слоях. Это связано с тем, что в соседних слоях эллипсы

поляризации распространяющихся мод ориентированы вдоль разных осей. Действительно, в соответствии с (3) эллипс поляризации право поляризованной волны в слое, описываемом тензором (2), вытянут вдоль оси x . Следовательно, в соседнем слое (поскольку он повернут относительно предыдущего на 90^0 относительно оси z , вдоль которой приложено намагничивающее поле) эллипс поляризации распространяющейся право поляризованной волны вдоль оси y . Причем, в силу малости магнито-оптического параметра распространяющиеся решения обладают большой эллиптичностью. Это означает, что распространяющаяся мода одного слоя возбуждает в первую очередь не распространяющуюся моду, а затухающую.

Последнее замечание становится очевидным, если рассмотреть моды в ненамагниченном ФК. Действительно, в этом случае в ФК распространяющиеся моды (поляризованные вдоль x или y) образованы резонансным туннелированием света через слои с отрицательной проницаемостью. В этом случае при переходе через границу распространяющаяся мода (в слое с положительной проницаемостью) переходит в экспоненциально затухающую\возрастающую моду (в слое с отрицательной проницаемостью). Намагничивание ФК вызывает малое изменение параметров системы, которое в свою очередь приводит к малому изменению собственных мод (решения становятся эллиптически поляризованными, но с большой эллиптичностью (3), вытянутой вдоль решений ненамагниченного ФК) и граничных условий, связывающих эти моды на границах двух слоев. При намагничивании распространяющаяся мода, за счет граничных условий, становится связана не только с экспоненциально убывающей/возрастающей, но также и с распространяющейся модой в соседнем слое. Однако, коэффициент, связывающий амплитуды распространяющихся мод в соседних слоях мал в меру малости МО параметра. Поэтому на границе раздела двух слоев образуются не только распространяющиеся, но также и экспоненциально убывающие/возрастающие решения. Эти качественные

рассуждения подтверждаются точным расчетом, который не приводится здесь в силу громоздкости формул.

Таким образом, показано, что в рассмотренном 1D МФК с сильной локальной анизотропией распространяются две моды, каждая из которых образуется как из право-поляризованных собственных мод отдельных слоев, так и из лево-поляризованных мод.

Анизотропия адмитанса

До сих пор рассматривались в основном безграничные фотонные кристаллы. Данный раздел посвящен описанию особенностей отражения блоховских волн в анизотропных МФК от границ. Оказывается, что отражение блоховских волн в анизотропных МФК обладает особенностью, не имеющей аналога не только в однородных (пусть анизотропных и/или магнитооптических) средах, но и в ФК, сделанных из изотропных компонентов. Эта особенность связана с фундаментальной разницей между гибридными и негибридными решениями. В случае, когда гибридизации нет, решения можно разделить по поляризациям (на право-, лево- циркулярные поляризованные, TE и TM моды и т.д.), и тем самым свести векторную задачу к двум независимым скалярным задачам. При этом каждое собственное решение обладает своим скалярным импедансом. То же относится и к случаю изотропно-гиротропных 1D ФК, и к случаю однородных сред. В этих случаях для сшивки собственных решений в различных средах достаточно равенства входных скалярных адмитансов соответствующих мод. В случае анизотропно-гиротропного ФК в результате смешивания гибридная блоховская волна в каждом слое состоит из четырех волн (имеющих различные поляризации и распространяющихся в противоположных направлениях). Отличительным свойством этой блоховской волны является то, что она обладает анизотропным собственным адмитансом.

Рассмотрим структуру гибридного решения в анизотропном слое. В общем случае решение в анизотропном слое можно записать в виде

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_o z} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_o z} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_e z} + D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ik_e z},$$

где A, B, C, D – амплитуды соответствующих четырех плоских волн, являющихся решениями уравнений Максвелла в рассматриваемом слое, k_o – волновой вектор обыкновенной волны, k_e – волновой вектор необыкновенной волны. На границе анизотропно-гиротропного ФК и внешней среды необходимо сшить тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей, то есть четыре компоненты E_x, E_y, H_x, H_y . Отметим, что в случае, когда нужно решать не задачу рассеяния с фиксированной амплитудой падающей волны, а задачу на собственные решения, достаточно сшить не абсолютные значения полей, а лишь их отношения $Y_x = H_x / E_y$ и $Y_y = -H_y / E_x$ (в квантовой механике это соответствует сшивке логарифмической производной). Величины Y имеют смысл входного адмитанса. Для любой однородной среды адмитанс изотропен, то есть

$$Y_x = H_x / E_y = \frac{k}{k_0} = -H_y / E_x = Y_y,$$

что прямо следует из уравнения $\text{rot}(\vec{E}) = \frac{1}{c} \frac{d\vec{H}}{dt}$. Для одной гибридной волны равенство адмитансов не выполнено, так как в анизотропном слое

$$Y_x = H_x / E_y = \frac{k_1}{k_0} \neq \frac{k_2}{k_0} = -H_y / E_x = Y_y.$$

Следовательно, только одно собственное решение анизотропно-гиротропного ФК не может быть сшито с одним решением в среде с негибридными собственными решениями.

Глава 2. Формирование поляризационно вырожденной запрещенной зоны.

Введение

Поскольку в оптическом диапазоне диэлектрические свойства большинства материалов лишь незначительно меняются при внешнем воздействии, то поиск возможности управления плотностью состояний сводиться к поиску эффекта, при котором даже незначительное изменение свойств материала может приводить к гигантским изменениям плотности состояний.

Обычно фотонные кристаллы, в частности диэлектрические зеркала, делают из самых простых материалов – изотропных диэлектриков. Использование в фотонных кристаллах анизотропных, гиротропных и киральных материалов приносит новую физику и значительно расширяет свойства и область практического применения фотонных кристаллов.

Среди успешного применения гиротропных материалов, в частности, магнитооптических, следует упомянуть о гигантском усилении эффекта Фарадея, создании управляемой магнитной суперпримы и других эффектах, связанных с усилением магнитооптических свойств. Во всех этих случаях усиление магнитооптических свойств связано не с изменением собственно магнитооптики материалов, а с перестройкой зонной структуры ФК под действием внешнего магнитного поля.

При намагничивании магнито-оптической компоненты ФК происходит изменение тензора её диэлектрической проницаемости.

Не намагниченный материал

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Намагниченный материал

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\alpha & 0 \\ -i\alpha & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Изменение симметрии тензора диэлектрической проницаемости ведет к снятию вырождения: линейно поляризованные волны более не являются собственными модами, а волновые векторы право и лево поляризованных волн становятся различными, испытывая сдвиги различных знаков относительно волнового вектора в немагнитном случае:

$$k_{mag} = k_0 n_{mag} = k_0 \sqrt{\varepsilon \pm \alpha} \approx k_0 \sqrt{\varepsilon} \pm k_0 \frac{\alpha}{2\sqrt{\varepsilon}} = k_0 n_{nonmag} \pm k_0 \frac{\alpha}{2\sqrt{\varepsilon}} = k_{nonmag} \pm k_0 \frac{\alpha}{2\sqrt{\varepsilon}}. \quad (6)$$

Благодаря именно этим сдвигам наблюдается эффект Фарадея.

Изменение волновых чисел магнитооптического вещества приводит к сдвигу зонной структуры всего фотонного кристалла. Например, для 1D фотонного кристалла, ячейка которого состоит из двух слоев (с показателями преломления и толщинами n_1, n_2, d_1, d_2), положение запрещенных зон при падении по нормали определяется выражением

$$k_0 n_1 d_1 + k_0 n_2 d_2 = \pi l, l \in Z. \quad (7)$$

Поэтому небольшое изменение одного из показателей преломления неизбежно приводит к сдвигу по частоте положения запрещенных зон. Причем в соответствии с (6) для право и лево поляризованных волн этот сдвиг происходит в разные стороны.

Поскольку для реальных материалов магнитооптический параметр является чрезвычайно малой величиной, то спектр прохождения через конечный образец МФК лишь слегка сдвигается, полностью копируя все особенности (как запрещенные зоны, так и частоты резонансной прозрачности, отвечающие собственным состояниям) спектра для немагнитного ФК. Таким образом, плотность состояний, практически не меняясь, слегка сдвигается по частоте вместе со всем спектром прохождения. Иными словами, применение магнитооптических компонентов в ФК на основе изотропных материалов позволяет лишь незначительно сдвигать (с помощью внешнего магнитного поля) по частоте спектральные характеристики, не меняя при этом качественный вид зависимостей.

Кроме гиротропных материалов большой практический интерес вызывает применение анизотропных материалов в качестве компонентов фотонных кристаллов. Анизотропия, так же как и гиротропия, снимает вырождение по поляризации. Циркулярно поляризованные волны в таком случае более не являются собственными.

Рассмотрим анизотропный слой с осью анизотропии, параллельной границе раздела. Тогда обыкновенная и необыкновенная волны будут соответствовать ТЕ (когда поле E параллельно оси анизотропии) и ТМ (когда поле H параллельно оси анизотропии) модам. Для распространяющихся по нормали к слоям собственных мод 1D ФК (ТЕ и ТМ мод), ячейка которого состоит из анизотропного материала (с осью анизотропии, параллельной слоям) и изотропного материала, в соответствии с (7), положение запрещенных зон будет различным. Причем, поскольку разница показателей преломления для собственных мод анизотропной среды (обыкновенной и необыкновенной волн) может быть на порядки больше, чем разница показателей преломления для собственных мод гиротропиной среды, то и в соответствии с (7) первые запрещенные зоны для ТЕ и ТМ мод могут даже не пересекаться. Однако, несмотря на то, что для естественных веществ анизотропия может быть довольно существенной, применение анизотропных материалов в рассматриваемой системе также не приводит к качественным изменениям в спектральных свойствах. Каждый спектр (ТЕ и ТМ) в отдельности полностью повторяет спектр обыкновенного 1D фотонного кристалла, сделанного из обычных изотропных материалов.

Для обоих рассмотренных случаев: – магнитофотонного кристалла, сделанного из магнитооптического и изотропного слоев, и ФК, сделанного из анизотропного слоя и изотропного, – зонные структуры полностью копируют зонную структуру для обыкновенного 1D ФК. Причина этого заключена в том, что собственные моды в магнитооптическом/анизотропном материале – циркулярно/линейно поляризованные волны – являются собственными модами любого изотропного диэлектрика. При переходе к собственным модам каждый

материал описывается одним параметром – показателем преломления для данной моды – и ни чем не отличается от обычного изотропного диэлектрика. Следовательно, если перейти к собственным модам, то будем иметь два невзаимодействующих решения, каждое из которых описывает 1D фотонный кристалл, сделанный из изотропных компонентов.⁵

Таким образом, в обоих вышерассмотренных случаях – магнитофотонного и анизотропного ФК – описание характеристик (благодаря возможности выбрать единые собственные моды для всего кристалла) свелось к описанию характеристик двух обыкновенных 1D ФК из изотропных компонентов.

Перейдем наконец к случаям, когда невозможно выбрать единые собственные моды для всех слоев ФК. Начнем с рассмотрения ФК, период которого содержит одновременно анизотропный слой и магнитооптический. До тех пор пока ФК ненамагничен, он представляет собой рассмотренный ранее случай ФК из изотропной и анизотропной компонентов. Собственными решениями в этом ФК являются ТЕ и ТМ волны, а спектр этого ФК является объединением двух спектров обыкновенных ФК, сделанных из изотропных компонентов. Когда фотонный кристалл находится в намагничивающем поле, собственными решениями в магнитооптическом слое являются право и лево циркулярно-поляризованные волны. Различие симметрий собственных решений в разных слоях приводит к тому, что на границе раздела анизотропной среды и магнитооптического материала одна из падающих волн будет порождать две преломленные. Поэтому собственное решение в ФК (блоховская волна) в каждом слое будет представлять собой сумму четырех волн. В таком кристалле возможно появление новых решений и возникновение качественного изменения спектра. Целью данной главы является исследование спектральных характеристик описанного кристалла.

⁵ На математическом языке это означает, что Т-матрица, описывающая слои фотонного кристалла, в представлении собственных мод будет иметь блочно диагональный вид.

Результаты численного эксперимента

Рассмотрим 1D фотонный кристалл, элементарная ячейка которого состоит из анизотропного одноосного слоя и слоя изотропного магнитооптического материала. Ось анизотропии первого слоя параллельна плоскости раздела сред, а намагничивающее поле направленно перпендикулярно этой плоскости.

Для описания такой среды мы воспользуемся методом Т-матриц. Поскольку собственные моды в разных слоях различны, необходимо выбрать единое представление для Т-матриц для всех слоёв. Поэтому мы будем использовать Т-матрицы, связывающие тангенциальные компоненты полей E и H по разные стороны образца, находящегося в вакууме.

Согласно теореме Флоке-Блоха собственное решение при прохождении через элементарную ячейку ФК может измениться лишь на соответствующую фазу. Как следствие, после приведения Т-матрицы элементарной ячейки к диагональному виду

$$T = S \begin{pmatrix} e^{ik_1 L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ik_2 L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_3 L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{ik_4 L} \end{pmatrix} S^{-1},$$

где k_i – искомые блоховские волновые векторы.

Таким образом, имеем четыре собственных волновых числа k_i , определяемых четырьмя собственными значениями e^{ikL} , где L – период ФК. В общем случае для нахождения этих значений нужно решить соответствующее характеристическое уравнение $\det|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$, которое является уравнением 4-ой степени. Однако в данном случае можно воспользоваться определённой симметрией задачи для упрощенного нахождения решений.

Действительно, рассматриваемый ФК обладает плоскостью симметрии, параллельной границе раздела сред. Для таких сред $\omega(\vec{k}) = \omega(-\vec{k})$, иными словами, если есть решение с волновым вектором \vec{k} , то есть решение и с

волновым вектором $-\vec{k}$ [39]. Следовательно, все решения имеют вид $\pm k_1, \pm k_2$, и T -матрица в новом базисе приобретает вид:

$$T = S \begin{vmatrix} e^{ik_1 L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_1 L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_2 L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_2 L} \end{vmatrix} S^{-1}, \quad (8)$$

где $\pm k_1, \pm k_2$ пока неизвестные величины, подлежащие нахождению. Поскольку характеристический многочлен T -матрицы не меняется при преобразовании $T \rightarrow S^{-1}TS$, то в соответствии с (8) он имеет вид:

$$\begin{aligned} & \lambda^4 - 2(\cos(k_1 L) + \cos(k_2 L))\lambda^3 + \\ & + (2 + 4\cos(k_1 L)\cos(k_2 L))\lambda^2 - 2(\cos(k_1 L) + \cos(k_2 L))\lambda + 1 = 0 \end{aligned}$$

С другой стороны, коэффициенты характеристического многочлена $\det|T_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$ можно выразить непосредственно через элементы исходной T -матрицы T_{ij} . Эту матрицу легко найти, перемножая T -матрицы отдельных слоев, а последние легко записать, используя формулы Френеля. Сравнивая две записи характеристического многочлена, легко заметить, что коэффициенты при λ^3 и λ^2 дают полную систему уравнений для нахождения дисперсионных зависимостей $k_{1,2}(\omega)$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 T_{ii} = 2(\cos(k_1 L) + \cos(k_2 L)) = \text{Tr}(T) \\ \sum_{i=1}^4 T_{ii}^2 - \sum_{i=1, j=1, i \neq j}^4 T_{ij}T_{ji} = 2(1 + 2\cos(k_1 L)\cos(k_2 L)) \end{cases} \quad (9)$$

Как отмечалось ранее, когда намагниченность равна нулю, собственными решениями в фотонном кристалле являются ТЕ и ТМ блоховские волны, представляющие собой бесконечную сумму плоских волн, волновые векторы которых отличаются на векторы обратной решетки. Таким образом, эти блоховские волны образуются за счет интерференции плоских волн соответствующей поляризации. Запрещённые зоны для ТЕ (ТМ) блоховской

волны возникают исключительно за счет взаимодействия между ТЕ (ТМ)-поляризованными плоскими волнами, составляющими эту ТЕ (ТМ) блоховскую волну. Следовательно, запрещённые зоны образуются при брэгговском условии $k_1 d = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ для первого решения и $k_2 d = \pi m, m \in \mathbb{Z}$ для второго решения, то есть точно на границе бриллюэновской зоны (см. рисунок 1) [43].

Включение магнитного поля нарушает симметрию задачи. За счет магнитооптической компоненты возникает взаимодействие, так называемый «каплинг», между ТЕ (ТМ)-поляризованными блоховскими волнами. При взаимодействии происходит перекачка энергии из блоховской волны одной поляризации в другую и обратно. Этот каплинг может носить как конструктивный характер, когда взаимодействуют волны, распространяющиеся в одном направлении, так и деструктивный характер, когда взаимодействующие волны распространяются в противоположных направлениях. В последнем случае возможна ситуация, когда поток энергии, переносимый одной волной вперёд, сравнится с потоком энергии, переносимым другой волной обратно, и передачи энергии через образец не будет. Такая ситуация характерна для запрещённой зоны.

И действительно, численный эксперимент полностью подтверждает приведенные рассуждения и показывает, что включение намагничивающего поля приводит к появлению дополнительных запрещенных зон, которые находятся не на бриллюэновских границах (см. рисунок 9).

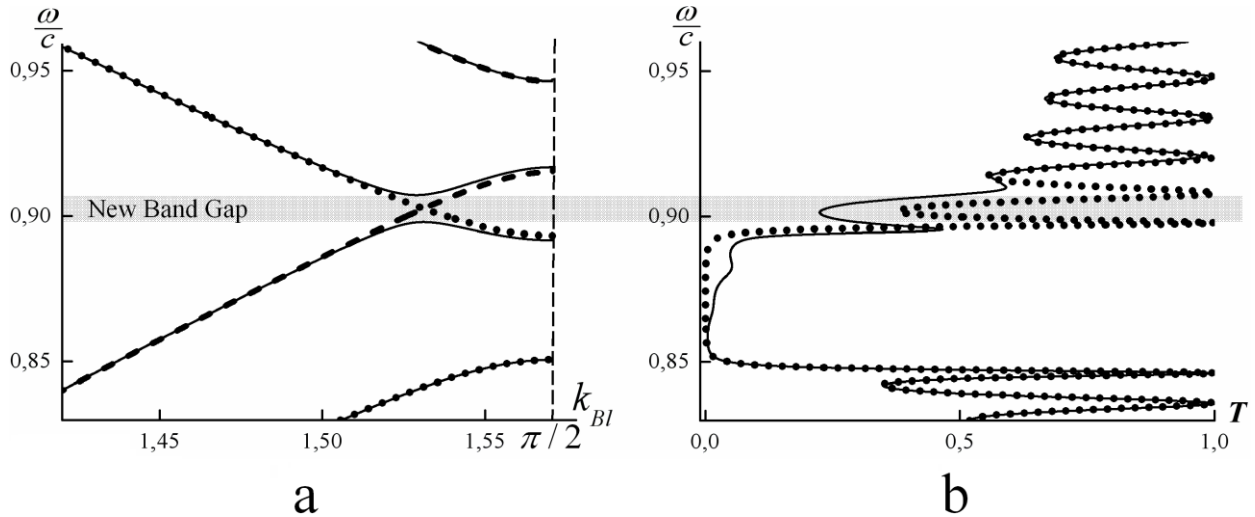


Рисунок 9 – Образование дополнительной запрещенной зоны под воздействием внешнего магнитного поля.

Запрещенные зоны образуются благодаря перезамыканию (являющемуся результатом взаимодействия между ТЕ и ТМ волнами) возрастающей и убывающей дисперсионных кривых, приведенных в первую зону Бриллюэна. Несложно заметить, что точка пересечения этих кривых соответствует брегговскому условию

$$k_1 d + k_2 d = 2\pi l, l \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Возрастающая кривая соответствует волне, распространяющейся вперед, а убывающая кривая соответствует волне, распространяющейся назад. При возникновении взаимодействия между волнами происходит перекачка энергии между ними, то есть волна, бегущая вперед, начинает подпитывать волну, бегущую назад, и образуется запрещенная зона.

Одним из удивительных свойств этой запрещенной зоны является поляризационное вырождение (в дальнейшем мы будем называть такие запрещенные зоны вырожденными). Волновое уравнение, описывающее распространение электромагнитных волн в неоднородной диэлектрической среде, является уравнением второго порядка, но благодаря своей векторной природе имеет четыре независимых решения. В 1D фотонных кристаллах, сделанных из изотропных материалов, при распространении волны перпендикулярно слоям наблюдается вырождение по поляризации, то есть оба решения,

распространяющиеся «вперед», имеют одинаковые волновые векторы. Наличие в отдельности изотропных или гиротропных включений снимает это вырождение. Однако оказывается, что комбинация гиротропии, анизотропии и пространственной дисперсии снова приводит к вырождению решений по поляризации. Оказывается, что и действительные, и мнимые части волнового вектора (приведенного в первую зону Бриллюэна) совпадают для частот, лежащих внутри запрещенной зоны, образовавшейся благодаря одновременному влиянию анизотропных и гиротропных свойств. То есть включение магнитного поля не снимает вырождение (как это бывает, например, в эффекте Зеемана), а наоборот является причиной возникновения вырождения. Любопытно отметить, что если зафиксировать частоту и рассматривать падение не только по нормали, то мы обнаружим, что (в отличие от 1D ФК сделанного из изотропных компонентов, в котором для любой частоты есть только одно направление поляризационного вырождения) вырожденной запрещенной зоне соответствует некоторый непрерывный интервал углов.

Формирование вырожденной запрещенной зоны в рамках теории возмущений

Формирование запрещенных зон на бриллюэновской границе. В данном разделе представлены результаты теоретического анализа формирования вырожденных запрещенных зон в рамках теории возмущений. Рассмотрим распространение электромагнитной волны перпендикулярно слоям в периодической слоистой системе (см. рисунок 10).

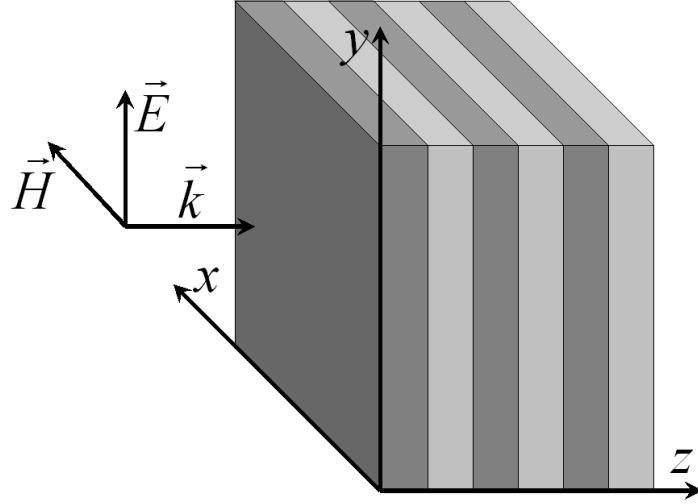


Рисунок 10 – Исследуемая структура.

Для начала, следуя [43], рассмотрим формирование запрещенных зон на бриллюэновских границах.

В соответствии с теоремой Блоха собственными решениями уравнений Максвелла в периодической среде является блоховская волна:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r}) e^{i\vec{k}_{Bl}\vec{r}} = \left(\sum_n \vec{f}_n e^{i\vec{G}_n\vec{r}} \right) e^{i\vec{k}_{Bl}\vec{r}} = \sum_n \vec{f}_n e^{i(\vec{G}_n + \vec{k}_{Bl})\vec{r}} = \sum_n \vec{f}_n e^{i\vec{k}_{Bl}^{(n)}\vec{r}}. \quad (11)$$

Последнее равенство в этом уравнении представляет решение в виде суммы плоских волн, волновые векторы \vec{k}_{Bl} которых отличаются на вектор обратной решетки \vec{G}_n . Внутри фотонного кристалла все эти волны не являются независимыми. Соотношение между их амплитудами \vec{f}_n определяется многократным перерассеиванием.

В простейшем случае одномерного фотонного кристалла, состоящего из изотропных слоев, электрическое поле удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon(z) \vec{E} = 0, \quad (12)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c}$. Подставляя (11) в (12) получим линейную систему на амплитуды:

$$(\vec{k}_{Bl} + \vec{G}_n)^2 \vec{f}_n - k_0^2 \sum_{n'} \varepsilon_{n-n'} \vec{f}_{n'} = 0, \quad (13)$$

где $\varepsilon(z) = \sum_n \varepsilon_n e^{i\vec{G}_n z}$ и $\vec{G}_n = n\vec{G}$ вектор обратной решетки.

Перепишем (13) в виде

$$\vec{f}_n = \frac{k_0^2 \sum_{n' \neq n} \varepsilon_{n-n'} \vec{f}_{n'}}{(\vec{k}_{Bl} + n\vec{G})^2 - k_0^2 \varepsilon_0}.$$

При одновременном выполнении условий $(\vec{k}_{Bl} - \vec{G})^2 - k_0^2 \varepsilon_0 \approx 0$ и $k_{Bl}^2 - k_0^2 \varepsilon_0 \approx 0$ знаменатели при $n=0$ и $n=-1$ одновременно стремятся к нулю. В этом случае есть две доминирующие гармоники с амплитудами \vec{f}_0 and \vec{f}_{-1} и волновыми векторами $k_{Bl}^{(0)} = k_{Bl}$ и $k_{Bl}^{(-1)} = (k_{Bl} - G) \approx -k_{Bl}$. Далее предположим, что изменения диэлектрической проницаемости небольшие, то есть $\varepsilon_0 \gg \varepsilon_1$. Таким образом, в первом порядке теории возмущений (по отношению к ε_1) можно ограничиться лишь этими двумя гармониками:

$$\begin{aligned} (k_{Bl}^2 - k_0^2 \varepsilon_0) \vec{f}_0 - k_0^2 \varepsilon_1 \vec{f}_{-1} &= 0 \\ ((k_{Bl} - G)^2 - k_0^2 \varepsilon_0) \vec{f}_{-1} - k_0^2 \varepsilon_1^* \vec{f}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Для однородной среды ($\varepsilon_1 = 0$) получаем два независимых уравнения, описывающих две волны, бегущие в разные стороны.

Отличное от нуля решение уравнения (14) существует только когда

$$\det \begin{vmatrix} k_{Bl}^2 - k_0^2 \varepsilon_0 & -k_0^2 \varepsilon_1 \\ -k_0^2 \varepsilon_{-1} & (k_{Bl} - G)^2 - k_0^2 \varepsilon_0 \end{vmatrix} = (k_{Bl}^2 - k_0^2 \varepsilon_0) ((k_{Bl} - G)^2 - k_0^2 \varepsilon_0) - k_0^4 |\varepsilon_1|^2 = 0 \quad (15)$$

Заменой $k_{Bl} - G/2 \rightarrow x$ это уравнение сводится к биквадратному и имеет его решения: $x^2 = k_0^2 \varepsilon_0 + G^2/4 \pm \sqrt{k_0^2 \varepsilon_0 G^2 + k_0^4 |\varepsilon_1|^2}$. Однако лишь одно из этих двух

решений
$$x^2 = k_0^2 \varepsilon_0 + G^2/4 - \sqrt{k_0^2 \varepsilon_0 G^2 + k_0^4 |\varepsilon_1|^2} \approx (k_0 \sqrt{\varepsilon_0} - G/2)^2 - \frac{k_0^2 |\varepsilon_1|^2}{2\sqrt{\varepsilon_0} G}$$

соответствует условиям $(\vec{k}_{Bl} - \vec{G})^2 - k_0^2 \varepsilon_0 \approx 0$ и $k_{Bl}^2 - k_0^2 \varepsilon_0 \approx 0$. Это решение

предсказывает существование запрещенной зоны около частоты $k_0^{(0)}\sqrt{\varepsilon_0} = G/2$ когда $x^2 < 0$ и k_{Bl} имеет мнимую часть.

Ширина запрещенной зоны [43]:

$$\Delta k_0 = \frac{|\varepsilon_1| k_0^{(0)}}{n_0^2},$$

где $n_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$ и $k_0^{(0)} = \frac{G}{2n_0}$.

Таким образом, периодическое возмущение диагональных элементов тензора диэлектрической проницаемости приводит к брегговскому резонансу. На границе зоны Бриллюэна ($2k_{Bl} = G$) блоховская волна, главным образом, состоит из двух гармоник, которые в гомогенной среде свободно перемещались в противоположных направлениях, как плоские волны. Так как амплитуды этих гармоник идентичны, они переносят идентичную энергию в противоположных направлениях. Таким образом, брегговский резонанс приводит к отсутствию передачи энергии по системе и, следовательно, к формированию оптической запрещенной зоны.

В одномерном фотонном кристалле из изотропных компонентов волны любой поляризации, распространяющиеся по нормали к поверхности слоев, имеют одинаковую структуру, так как система вырождена по поляризации. Если один из компонентов – одноосный кристалл с осью анизотропии, параллельной слоям, вырождение снимается, и обыкновенные и необыкновенные блоховские волны обладают запрещенными зонами различной ширины, которые могут частично пересекаться. Намагничивание фотонного кристалла, состоящего из изотропных и магнитооптических материалов, также снимает вырождение и в этом случае блоховские волны правой и левой поляризаций так же имеют свои запрещенные зоны. Во всех этих случаях запрещенные зоны сформированы на границе зоны Бриллюэна. С математической точки зрения это следует из того, что после выбора надлежащего базиса (линейно поляризованные волны для случая анизотропного фотонного кристалла и право- и лево-циркулярные

поляризованные волны для случая магнитофотонного кристалла из компонентов, являющихся изотропными до намагничивания) системы могут быть описаны уравнением (12) с соответствующей скалярной периодической функцией. Это является следствием сохранения симметрии по всей системе.

Формирование поляризационно вырожденных запрещенных зон. Оказывает, что фотонные кристаллы, сделанные из различных анизотропных материалов, оси которых расположены под углом друг к другу [6, 44-47] или 2D МФК [18], а также 1D МФК, содержащие анизотропные компоненты [16, 19, 21-23, 25, 48, 49 и т.д.], обладают новым типом запрещенных зон. В качестве примера рассмотрим 1D МФК, период которого состоит из анизотропных магнитооптических слоев. В этом случае, уравнение (3) приобретает вид

$$\left(\vec{k}_{Bl} + \vec{G}_n\right)^2 \vec{f}_n - k_0^2 \sum_{n'} \hat{\varepsilon}_{n-n'} \vec{f}_{n'} = 0,$$

при этом $\hat{\varepsilon}_n$ имеет так же недиагональные компоненты. Таким образом,

$$\hat{\varepsilon}(z) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(z) & ig(z) & 0 \\ -ig(z) & \varepsilon_{yy}(z) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}(z) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $\varepsilon_{aa}(z) = \sum_j \varepsilon_{aa,j} e^{ijGz}$, $a = x, y, z$, и $g(z) = \sum_j g_j e^{ijGz}$. Этот случай отличается от

рассмотренного ранее только формой невозмущенного тензора диэлектрической проницаемости. В декартовой системе:

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon_{xx}(z) E_x - ik_0^2 g(z) E_y = 0 \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon_{yy}(z) E_y + ik_0^2 g(z) E_x = 0 \end{cases} \quad (17)$$

В невозмущенном случае:

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon_{xx,0} E_x - ik_0^2 g_0 E_y = 0 \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon_{yy,0} E_y + ik_0^2 g_0 E_x = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Уравнения (18) разделяются и имеют решением четыре плоские волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. Эти собственные решения могут быть описаны в терминах волнового вектора и поляризации. Имеется право поляризованная волна $\hat{e}_x + i\varphi\hat{e}_y$ с волновым вектором

$$\left(\frac{k_1}{k_0}\right)^2 = n_1^2 = \varepsilon + \sqrt{\delta^2 + g_0^2}, \quad (19a)$$

и лево поляризованная волна $i\varphi\hat{e}_x + \hat{e}_y$ с волновым вектором

$$\left(\frac{k_2}{k_0}\right)^2 = n_2^2 = \varepsilon - \sqrt{\delta^2 + g_0^2}, \quad (19b)$$

где $\varepsilon = \frac{\varepsilon_{xx,0} + \varepsilon_{yy,0}}{2}$, $\delta = \frac{\varepsilon_{xx,0} - \varepsilon_{yy,0}}{2}$, $\varphi = \frac{\sqrt{\delta^2 + g_0^2} - \delta}{g_0}$, и \hat{e}_x, \hat{e}_y – единичные векторы

в направлениях x и y , соответственно.

Базис \hat{e}_x, \hat{e}_y не удобен для решения (17), потому что даже в невозмущенном случае в этом базисе (17) не разделяются на два независимых решения. Поэтому выберем базис в виде $E_r = E_x - i\varphi E_y$, и $E_l = E_y - i\varphi E_x$. В этом базисе получим:

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_r}{dz^2} + k_1^2 E_r + k_0^2 A_r(z) E_r + k_0^2 i B(z) E_l = 0 \\ \frac{d^2 E_l}{dz^2} + k_2^2 E_l + k_0^2 A_l(z) E_l - k_0^2 i B(z) E_r = 0 \end{cases}, \quad (20)$$

где $A_r(z) = \frac{\Delta\varepsilon_{xx} + 2\Delta g\varphi + \varphi^2 \Delta\varepsilon_{yy}}{1 + \varphi^2}$, $A_l(z) = \frac{\Delta\varepsilon_{yy} + 2\Delta g\varphi + \varphi^2 \Delta\varepsilon_{xx}}{1 + \varphi^2}$,

$B(z) = \frac{(\Delta\varepsilon_{xx} - \Delta\varepsilon_{yy})\varphi + \Delta g(\varphi^2 - 1)}{1 + \varphi^2}$, и $\Delta\varepsilon_{jj} = \varepsilon_{jj}(z) - \varepsilon_{jj,0}$, $\Delta g = g(z) - g_0$, k_1 и k_2

определяются из (19). Функции A_r, A_l, B являются периодическими с периодом системы и, в силу малости $\Delta\varepsilon_{ij}$, могут быть рассмотрены как возмущения.

Решением уравнения (20) является блоховская волна

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r \\ E_l \end{pmatrix} = \sum_j \begin{pmatrix} R_j \\ L_j \end{pmatrix} e^{i(k_{Bl} + jG)z}. \text{ Учитывая периодичность } A_r, A_l, B, \text{ получим}$$

$$A_r(z) = \sum_j A_{r,j} e^{ijGz}, \quad A_l(z) = \sum_j A_{l,j} e^{ijGz} \quad \text{и} \quad B(z) = \sum_j B_j e^{ijGz},$$

$$\text{где } A_{r,j} = \frac{\varepsilon_{xx,j} + 2\varphi g_j + \varphi^2 \varepsilon_{yy,j}}{1 + \varphi^2}, \quad A_{l,j} = \frac{\varphi^2 \varepsilon_{xx,j} + 2\varphi g_j + \varepsilon_{yy,j}}{1 + \varphi^2},$$

$$B_j = \frac{(\varepsilon_{xx,j} - \varepsilon_{yy,j})\varphi + g_j(\varphi^2 - 1)}{1 + \varphi^2} \quad \text{и} \quad A_{r,0} = A_{l,0} = B_0 = 0. \text{ Поскольку } A_l(z), A_r(z) \text{ и}$$

$B(z)$ являются действительными величинами, то $A_{r,j} = A_{r,-j}^*$, $A_{l,j} = A_{l,-j}^*$ и $B_j = B_{-j}^*$.

Из (20) получаем:

$$\begin{cases} -(k_{Bl} + jG)^2 R_j + k_1^2 R_j + k_0^2 \sum_{j'} A_{r,j-j'} R_{j'} + k_0^2 i \sum_{j'} B_{j-j'} L_{j'} = 0 \\ -(k_{Bl} + jG)^2 L_j + k_2^2 L_j + k_0^2 \sum_{j'} A_{l,j-j'} L_{j'} - k_0^2 i \sum_{j'} B_{j-j'} R_{j'} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Эту систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} R_j = \frac{k_0^2 \sum_{j'} A_{r,j-j'} R_{j'} + k_0^2 i \sum_{j'} B_{j-j'} L_{j'}}{(k_{Bl} + jG)^2 - k_1^2} \\ L_j = \frac{k_0^2 \sum_{j'} A_{l,j-j'} L_{j'} - k_0^2 i \sum_{j'} B_{j-j'} R_{j'}}{(k_{Bl} + jG)^2 - k_2^2} \end{cases}$$

При одновременном выполнении условий $(\vec{k}_{Bl} - \vec{G})^2 - k_1^2 \approx 0$ и $k_{Bl}^2 - k_1^2 \approx 0$

знаменатель при $j = -1$ и $j = 0$ одновременно стремится к нулю для R_{-1} и R_0 .

Аналогично для L_{-1} и L_0 при одновременном выполнении условий

$(\vec{k}_{Bl} - \vec{G})^2 - k_2^2 \approx 0$ и $k_{Bl}^2 - k_2^2 \approx 0$. Эти случаи приводят в зонам на бриллюэновской

границе и полностью идентичны рассмотренным в предыдущем разделе. В

частности, для первой пары можно записать уравнения

$$\begin{cases} (k_1^2 - k_{Bl}^2)R_0 + k_0^2 A_{r,1} R_{-1} = 0 \\ (k_1^2 - (k_{Bl} - G)^2)R_{-1} + k_0^2 A_{r,-1} R_0 = 0 \end{cases}$$

из которых получим ширину запрещенной зоны

$$\Delta k_0 = \frac{|A_{r,1}| k_0^{(0)}}{n_1^2}. \quad (22)$$

Однако, если $k_1 \neq k_2$, то существуют дополнительные условия $(\vec{k}_{Bl} - \vec{G})^2 - k_1^2 \approx 0$ и $k_{Bl}^2 - k_2^2 \approx 0$ (или $k_{Bl}^2 - k_1^2 \approx 0$ и $(\vec{k}_{Bl} - \vec{G})^2 - k_2^2 \approx 0$), которые приводят к одновременному росту R_{-1} и L_0 (соответственно R_0 и L_{-1}). Рассмотрим это условие более подробно, ограничившись для определенности парой R_0 и L_{-1} .

Из (21) получим:

$$\begin{cases} (k_{Bl}^2 - k_1^2)R_0 - ik_0^2 B_1 L_{-1} = 0 \\ ((k_{Bl} - G)^2 - k_2^2)L_{-1} + ik_0^2 B_{-1} R_0 = 0 \end{cases} \quad (23)$$

где $k_1 = n_1 k_0$ и $k_2 = n_2 k_0$ волновые векторы, относящиеся к невозмущенной среде (однородной анизотропно-гиротропной).

Эта система уравнений также похожа на (14) с одной лишь разницей, что k_1 и k_2 более не равны $k_0 \sqrt{\varepsilon_0}$ и являются разными величинами. Однако эта разница играет принципиальную роль в решении характеристического уравнения

$$\det \begin{vmatrix} k_2^2 - (k_{Bl} - G)^2 & -ik_0^2 B_1 \\ ik_0^2 B_{-1} & k_1^2 - k_{Bl}^2 \end{vmatrix} = (k_2^2 - (k_{Bl} - G)^2)(k_1^2 - k_{Bl}^2) - k_0^4 |B_1|^2 = 0. \quad (24)$$

Поскольку $k_1 \neq k_2$ это уравнение, в отличие от (15), не может быть сведено к простому биквадратному уравнению по отношению к k_{Bl} , поэтому требуется более глубокий анализ. Для того чтобы провести такой анализ, обратим внимание на то, как свойства полинома $D(z, k_0) = (n_2^2 k_0^2 - (z - G)^2)(n_1^2 k_0^2 - z^2) - k_0^4 |B_1|^2$ зависят от частоты. Корни $D(z, k_0) = 0$ определяют дисперсионное уравнение.

В невозмущенном случае ($B_1 = 0$) для произвольной частоты k_0 , уравнение (24) имеет 4 решения: $k_{Bl1,3} = \pm k_1 = \pm n_1 k_0$ и $k_{Bl2,4} = G \pm k_2 = G \pm n_2 k_0$, которые соответствуют пересечению кривой $D(z, k_0)$ с осью абсцисс (см. рисунок 11, пунктирная линия). Но необходимо принять во внимание условия $k_1^2 - k_{Bl}^2 \approx 0$ и $k_2^2 - (k_{Bl} - G)^2 \approx 0$, при которых уравнение (15) было получено. Одновременное выполнение этих условий возможно на частоте $k_0^{(0)}$ и только для двух блоховских векторов k_{Bl1}, k_{Bl2} . Для этой частоты ($k_0^{(0)} = \frac{G}{n_1 + n_2}$), в невозмущенном случае получим $k_{Bl1} = k_{Bl2}$. Таким образом, полином $D(k_{Bl})$ на частоте $k_0^{(0)}$ имеет двойной корень (см. рисунок 11, сплошная линия).

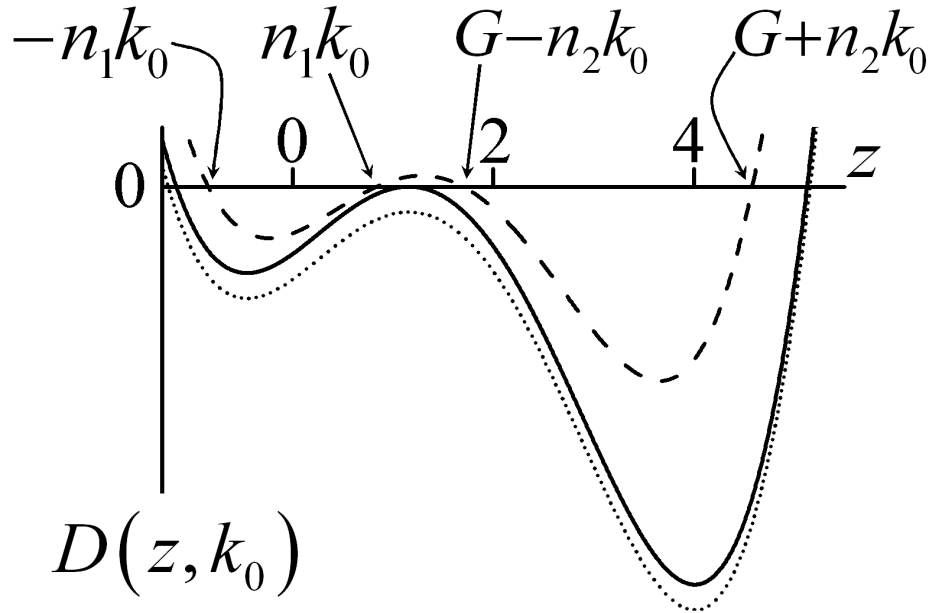


Рисунок 11 – Полином $D(z, k_0)$ при разных частотах. Пунктирная линия

соответствует невозмущенному случаю и частоте $k_0 \neq k_0^{(0)}$,

сплошная линия – невозмущенному случаю и частоте $k_0^{(0)}$,

точечная линия – возмущению и частоте $k_0^{(0)}$.

Добавление сколь угодно малого $-k_0^4 |B_1|^2$, (см. рисунок 11, точечная кривая) приводит к сдвигу всей кривой вниз и, как следствие, к исчезновению

пересечения $D(z, k_0)$ с осью абсцисс. Это означает, что решение стало комплексным. Таким образом, можно заключить, что анизотропное возмущение в гиротропной среде приводит к открытию запрещенной зоны.

Возвращаясь теперь к брегговскому условию между гармониками R_{-1} и L_0 , легко получить следующее уравнение:

$$\begin{cases} \left((k_{Bl} - G)^2 - k_1^2 \right) R_{-1} - ik_0^2 B_{-1} L_0 = 0 \\ \left(k_{Bl}^2 - k_2^2 \right) L_0 + ik_0^2 B_1 R_{-1} = 0 \end{cases}$$

И соответствующее ему характеристическое уравнение

$$\det \begin{vmatrix} k_1^2 - (k_{Bl} - G)^2 & -ik_0^2 B_1 \\ ik_0^2 B_1 & k_2^2 - k_{Bl}^2 \end{vmatrix} = \left(k_1^2 - (k_{Bl} - G)^2 \right) (k_2^2 - k_{Bl}^2) - k_0^4 |B_1|^2 = 0, \quad (25)$$

которое аналогично уравнению (24), нужно лишь заменить индексы 1 и 2 у k_i .

Таким образом, около частоты $k_0^{(0)} = \frac{G}{n_1 + n_2}$ формируется новая запрещенная зона.

Поскольку уравнение (25) заменой $k_{Bl} \rightarrow G - k_{Bl}$ превращается в (24), то эти уравнения предсказывают запрещенные зоны в одних и тех же местах. Иными словами, эта запрещенная зона вырождена по поляризации и, как описано ранее, будем называть ее поляризационно вырожденной.

В общем виде решение (24) довольно сложно выглядит, рассмотрим случай малых возмущений $|B_1| \ll |n_1 - n_2|$. В этом случае ширина запрещенной зоны

$$\Delta k_0 = \frac{|B_1| k_0^{(0)}}{n_1 n_2}, \quad (26)$$

где $k_0^{(0)} = \frac{G}{n_1 + n_2}$ с n_1 и n_2 из (19).

Сравнение (22) и (26) показывает, что брегговский резонанс между гармониками одинаковой поляризации обуславливается членом A_i , а между разными гармониками — членом B . Отсюда в частности следует, что возможна

ситуация, когда обыкновенных запрещенных зон нет, в то время как есть лишь поляризационно вырожденные зоны. Пример такого случая будет показан далее.

Теперь можно видеть последствия использования представления (22): различные резонансы определяются различными членами. В частности, для $B = 0$

$$\frac{\Delta\epsilon_{xx}(z) - \Delta\epsilon_{yy}(z)}{\Delta\epsilon_{xx,0} - \Delta\epsilon_{yy,0}} = \frac{\Delta g(z)}{g_0}.$$

Частным случаем этого условия, является условие, полученное в [21] $(\epsilon_{xx}(z) - \epsilon_{yy}(z))/g(z) = \text{const}$, при котором не возникает вырожденных запрещенных зон.

Некоторые особенности вырожденных запрещенных зон. Численное моделирование, проведенное методом Т-матриц во втором разделе данной главы, полностью подтверждает выводы теории возмущений. Кроме того, есть ряд дополнительных особенностей у вырожденных запрещенных зон. Некоторые из них (в частности отсутствие эффекта Бормана) будут рассмотрены далее в соответствующих разделах данной и следующих глав. Здесь остановимся на общих свойствах вырожденных зон.

Обратимся к приведенной (см. рисунок 12) и расширенной (см. рисунок 13) зонной картине. Для каждой частоты k_0 есть четыре блоховских вектора внутри вырожденной запрещенной зоны, в приведенной картине они имеют вид $a(k_0) \pm ib(k_0)$ и $-a(k_0) \pm ib(k_0)$.

Отметим, что для запрещенной зоны, возникающей на бриллюэновской границе, действительная часть волнового вектора одинакова для всех частот (и для первой зоны равна $G/2$). Поэтому, в частности, верхняя и нижняя границы бриллюэновской запрещенной зоны имеют одинаковые волновые векторы. В случае с вырожденной запрещенной зоной это не так. Обозначим A и B нижнюю и верхнюю границы вырожденной запрещенной зоны в приведенной картине (соответственно за A' и B' для расширенной картины). Видно, что при этом линия AB не является вертикальной.

Кроме того, не смотря на то, что действительные части (в приведенной картине) блоховских векторов одинаковы для обеих поляризаций, мнимые части различаются. И наоборот, в расширенной картине мнимые части одинаковы, а действительные отличаются.

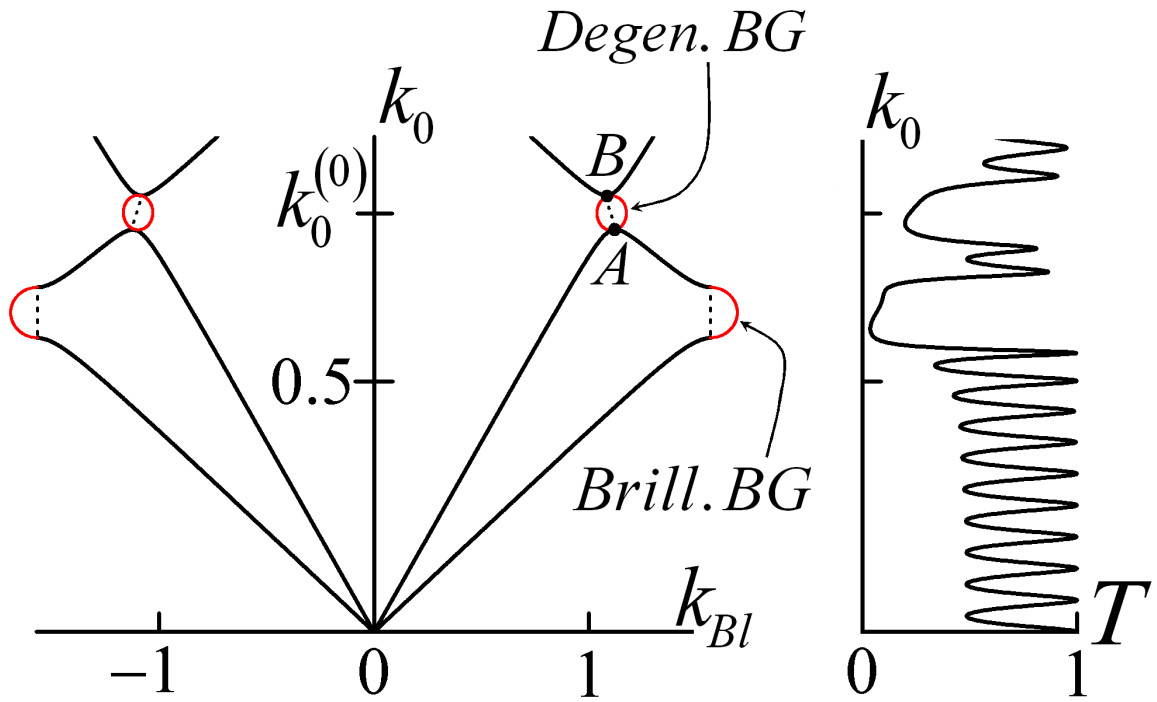


Рисунок 12 – Дисперсионная кривая, приведенная в первую зону Бриллюэна, и соответствующий коэффициент прохождения T (правая часть рисунка); вертикальная ось одинакова для обеих кривых. На левой части черные кривые показывают действительную часть k_{Bl} , красные мнимую. Внутри запрещенных зон действительная часть k_{Bl} показана точечной кривой. Частота и блоховский вектор измерены в периоде фотонного кристалла. Параметры системы: первый слой $\varepsilon_{xx} = 2.0$, $\varepsilon_{yy} = 7.7$, второй слой $\varepsilon_{xx} = 1.5$, $\varepsilon_{yy} = 4.5$ и $g = 0.7$. Полная толщина системы 20 слоев.

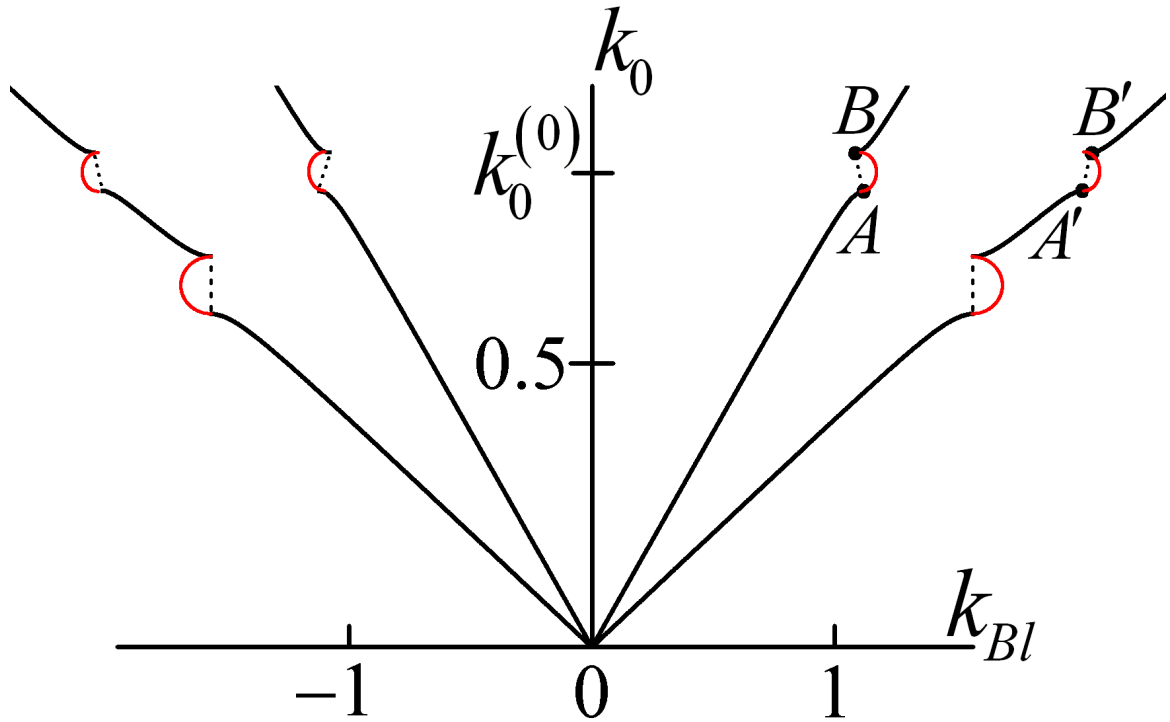


Рисунок 13 – Расширенная картина дисперсионной кривой. Параметры системы такие же, как рисунке 12.

Падение под углом к слоистой системе

Ранее, для упрощения, в слоистых средах рассматривалось распространение перпендикулярно слоям. При этом строились дисперсионные кривые, и на них было видно перезамыкание, приводящее к образованию вырожденной запрещенной зоны.

Необходимо отметить, что наблюдать вырожденную запрещенную зону можно и для случая падения под углом. В этом случае при фиксированной частоте можно исследовать поведение изочастотных картин.

На рисунке 14 приведена изочастотная картина (то есть зависимость нормальной компоненты блоховского вектора k_z от тангенциальной компоненты k_y) для магнито-фотонного кристалла, период которого состоит из анизотропного и магнитооптического слоя.

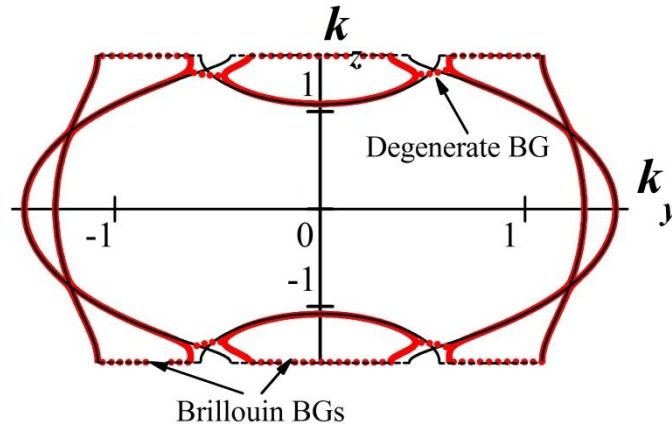


Рисунок 14 – Изочастотные кривые для магнитофотонного кристалла, период которого $\Lambda = 2d$ состоит из двух слоев одинаковой толщины d . Частота $k_0 d = 0.9$.

Параметры анизотропного слоя $\varepsilon_1^{ord} = 8.0$ и $\varepsilon_1^{ext} = 2.0$. Параметры магнитооптического слоя $\varepsilon_2 = 3.0$, $\pm ig = \pm 0.3i$. Черные кривые соответствуют ненамагниченному кристаллу, красные кривые – намагниченному. Области, показанные точечными кривыми, соответствуют запрещенным зонам.

В ненамагниченном кристалле распространяется две линейно независимые блоховские волны, каждая из которых поляризована линейно. Поэтому в ненамагниченном фотонном кристалле изочастоты просто пересекаются без образования запрещенных зон. Включение магнитного поля приводит к возникновению «каплинга» между решениями, в результате чего изочастоты перезамыкаются и образуется вырожденная запрещенная зона.

Взаимосвязь между вырожденной и бриллюэновской запрещенной зонами и механизм формирования замороженной моды

Одна из особенностей ФК из анизотропных и гиротропных материалов – возможность формирования замороженной моды [27, 31, 50]. Замороженная мода формируется на так называемой вырожденной границе запрещенной зоны. Это такая граница k_0^* запрещенной зоны, в окрестности которой дисперсионная зависимость описывается параболой 4-й степени $k_0 - k_0^* \propto (k_{Bl} - k_{Bl}^*)^4$ [27, 31, 50]. Очевидно, что вблизи вырожденной границы групповая скорость волн в ФК

близка к нулю. Однако замороженная мода отличается от решения вблизи границы обыкновенной бриллюэновской запрещенной зоны (33) тем, что амплитуда замороженной моды внутри ФК достигает значений, на несколько порядков превосходящих амплитуду падающей на ФК волны.

Подробный анализ свойств замороженных мод проведен в работах [27, 31, 50]. Однако вопрос о самом существовании необходимых для возникновения замороженных мод особенностей дисперсионных зависимостей, а также о достаточных условиях, при которых эти особенности реализуются, оставался открытым.

Данный раздел посвящен изучению достаточных условий образования вырожденной границы запрещенной зоны, вблизи которой

$$k_0 - k_0^* \propto (k_{Bl} - k_{Bl}^*)^4 \quad (27)$$

и формируется замороженная мода. Будем рассматривать лишь нормальное падение волн на одномерные ФК.

Отметим, что четвертая степень в зависимости (27) вблизи вырожденной границы 33 – максимальная из возможных для стационарных точек дисперсионных зависимостей в ФК. Это непосредственно следует из того, что дисперсионное соотношение произвольного ФК является полиномом четвертой степени от $\exp(ik_{Bl}\Lambda)$ (Λ – период ФК) и что каждой частоте соответствует четыре блоховских волновых числа (учитывая как волны, распространяющиеся с положительной, так и волны с отрицательной фазовой скоростью), лежащих в приведенной зоне Бриллюэна [6]. Поэтому вырожденная граница 33 является такой точкой, в которой сходятся все дисперсионные кривые при данной частоте. Следовательно, надо ожидать, что вырожденная граница 33 будет возникать в таких ФК и на таких частотах, где достигается наибольшая вырожденность по решениям дисперсионного уравнения (здесь следует повторить, что вырожденная 33 не может формироваться в одномерных ФК только из изотропных немагнитных материалов [50]). Из этих качественных рассуждений следует, что подходящими кандидатами в вырожденные границы могли бы быть точки,

являющиеся одновременно границей вырожденной [25] и бриллюэновской ЗЗ. Действительно, на частотах вырожденной ЗЗ действительные части всех четырех блоховских волновых чисел равны с точностью до знака [25], а на границах вырожденной ЗЗ с точностью до знака равны и сами блоховские волновые числа. Если рассматриваемая частота является еще и границей бриллюэновской ЗЗ, все четыре блоховских волновых числа выйдут на границу зоны Бриллюэна, а значит, ввиду инвариантности дисперсионных кривых относительно трансляции на вектор обратной решетки, будут равны между собой. Поэтому будем рассматривать ФК, в которых на некоторой частоте реализуется одновременно граница вырожденной и бриллюэновской ЗЗ.

Взаимосвязь между вырожденной и бриллюэновской запрещенной зонами.

Отметим, что вырожденная ЗЗ может формироваться не только вдали от бриллюэновских ЗЗ, но также и на частотах, принадлежащих бриллюэновской ЗЗ. Такое оказывается возможным, если частотные области бриллюэновских ЗЗ разных поляризаций пересекаются.

Действительно, вернемся к анизотропному ФК, рассмотренному выше (см. рисунок 15). Если предположить вначале, что оптические оси всех слоев сонаправлены, блоховские волны будут иметь определенную поляризацию: обыкновенную (перпендикулярную оптическим осям) и необыкновенную (параллельную оптическим осям). Дисперсионные ветви (частотные зависимости действительной и мнимой компонент блоховского волнового вектора), соответствующие каждой из этих блоховских волн, изображены на рисунке 15. Видно, что бриллюэновские ЗЗ, соответствующие разным блоховским волнам, пересекаются. Однако ввиду независимости обыкновенной и необыкновенной волн в случае параллельных оптических осей слоев вырожденная ЗЗ не возникает. На рисунке 15 приведены результаты расчетов для ФК с периодом $\Lambda = 2d$ из двух слоев одинаковой толщины d . k_{Bl} – блоховское волновое число, k_0 – волновое число в вакууме. Параметры первого слоя: обыкновенная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_1^{ord} = 5,0$, необыкновенная – $\varepsilon_1^{ext} = 7,8$. Параметры второго слоя:

обыкновенная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_2^{ord} = 7,5$, необыкновенная – $\varepsilon_2^{ext} = 5,4$.

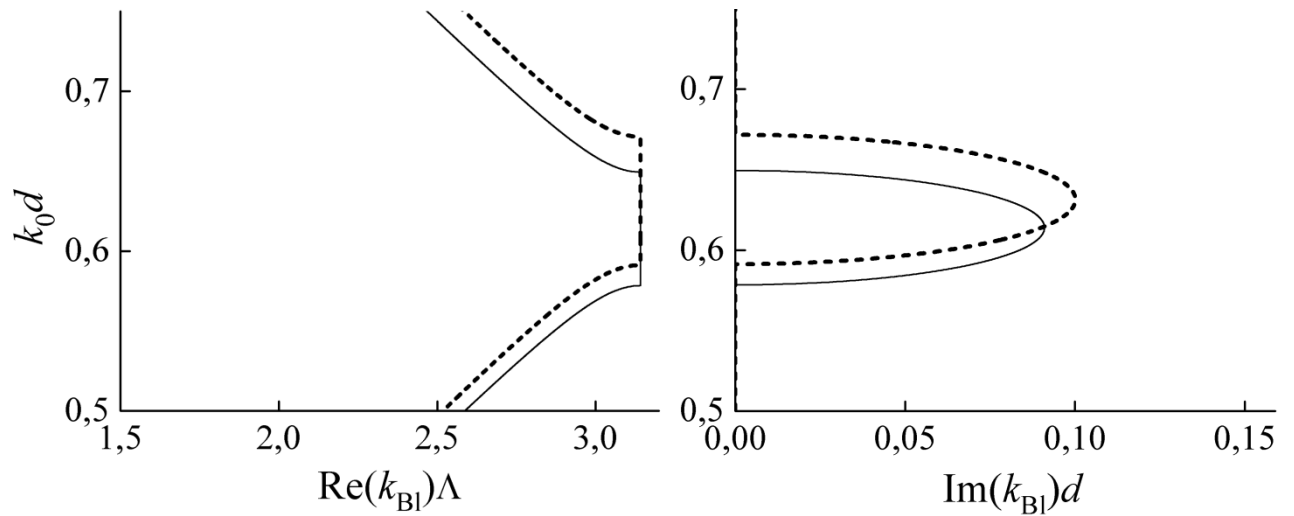


Рисунок 15 – Дисперсионные кривые двух блоховских волн в анизотропном ФК с сонаправленными оптическими осями слоев.

Если теперь отклонить оптические оси слоев периода на некоторый угол друг от друга (в плоскости слоев), то обыкновенная и необыкновенная поляризации оказываются гибридными в каждой из блоховских гармоник. На пересечении дисперсионных ветвей (действительной и мнимой компонент) может образоваться вырожденная ЗЗ (см. рисунок 16). На рисунке 16 приведены результаты для ФК с теми же параметрами слоев, что и в случае рисунка 15, однако оптические оси слоев отклонены друг от друга на угол 0,08 рад. Видно, что теперь, ввиду гибридизации обыкновенной и необыкновенной волн, на пересечении двух бриллюэновских ЗЗ возникает вырожденная ЗЗ. На частотах вырожденной ЗЗ мнимые части блоховских волновых чисел разных ветвей равны (с точностью до знака). Действительные части также равны (с точностью до знака), однако они лежат уже не на границе зоны Бриллюэна, как у бриллюэновской ЗЗ, а внутри.

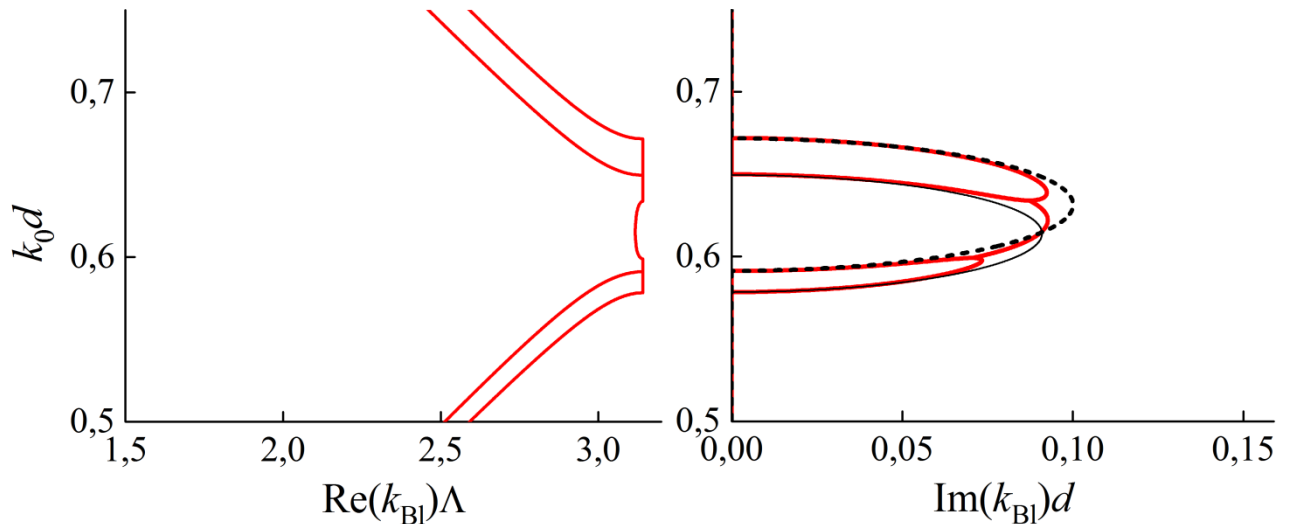


Рисунок 16 – Дисперсионные кривые (красные) в ФК с теми же параметрами слоев, что и на рисунке 15, но при наличии отклонения ориентаций оптических осей слоев. На пересечении бриллюэновских ЗЗ возникает вырожденная ЗЗ. Ее можно идентифицировать по равенству действительных и мнимых частей блоховских волновых чисел, а также по тому, что действительная часть волнового числа лежит внутри зоны Бриллюэна. Черные линии – те же, что на рисунке 15, приведены для сравнения.

Итак, тот факт, что на частотах ЗЗ действительная часть блоховского волнового числа не лежит на границе зоны Бриллюэна, может служить индикатором наличия вырожденной ЗЗ.

Следует отметить, что условия формирования вырожденной ЗЗ внутри бриллюэновской ЗЗ более сложные, чем условия формирования вырожденной ЗЗ вдали от бриллюэновских ЗЗ. Помимо пересечения дисперсионных ветвей требуются дополнительные условия на параметры слоев ФК. Для иллюстрации рассмотрим ФК с периодом из двух слоев одинаковой толщины d . Параметры первого слоя: обыкновенная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_1^{ord} = 5,0$, необыкновенная – $\varepsilon_1^{ext} = 5,4$. Параметры второго слоя: обыкновенная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_2^{ord} = 7,5$, необыкновенная – $\varepsilon_2^{ext} = 7,8$.

Нетрудно видеть, что в случае параллельных оптических осей дисперсионные зависимости такого ФК совпадают с изображенными на

рисунке 15. Однако если отклонить оптические оси слоев на некоторый угол (в плоскости слоев), то, несмотря на гибридизацию обыкновенной и необыкновенной волн, вырожденная ЗЗ не возникнет. Это показано на рисунке 17 для случая отклонения оптических осей на угол $0,3$ рад.

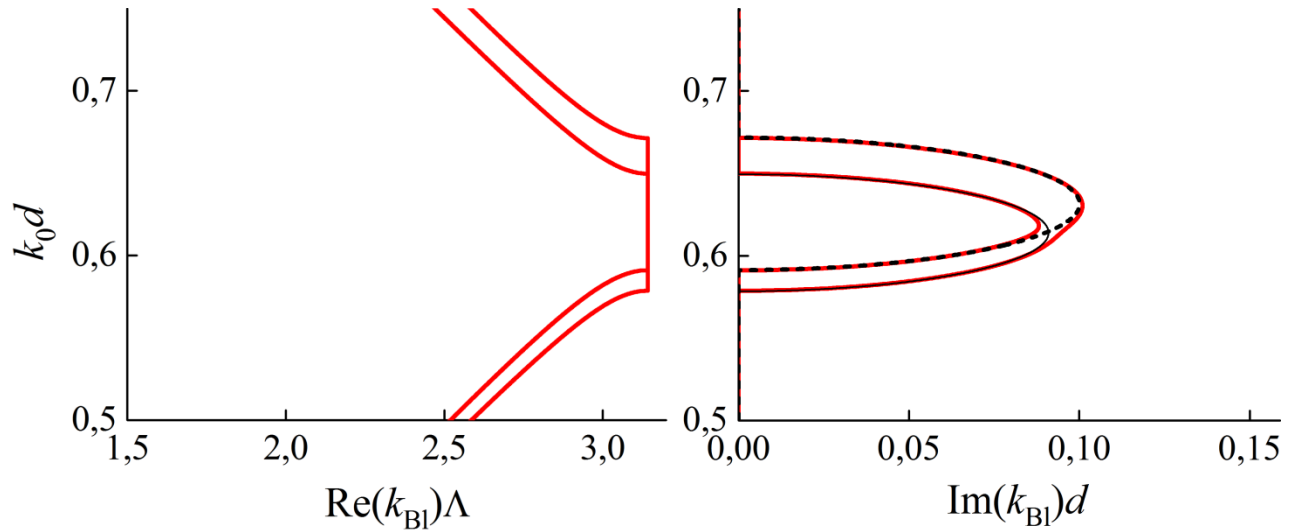


Рисунок 17 – Дисперсионные кривые (красные) блоховских волн в анизотропном ФК при наличии отклонения оптических осей слоев (в плоскости слоев). На пересечении бриллюэновских ЗЗ не возникает вырожденная ЗЗ. Параметры ФК приведены в тексте. Данный рисунок показывает, что пересечения действительных и мнимых компонент дисперсионных ветвей разных блоховских волн на частотах бриллюэновских ЗЗ не достаточно для формирования вырожденной ЗЗ. Черные линии – те же, что на рисунке 15, приведены для сравнения.

Формирование вырожденной границы ЗЗ. Результаты численного моделирования.

Вернемся к вопросу о формировании вырожденной границы. В данном разделе приведем результаты численных расчетов дисперсионных ветвей ФК, иллюстрирующие механизм формирования вырожденной границы ЗЗ. На рисунке 18 представлена зависимость $\text{Re}(k_{BI}(k_0))$ в сверхрасширенной дисперсионной картине.

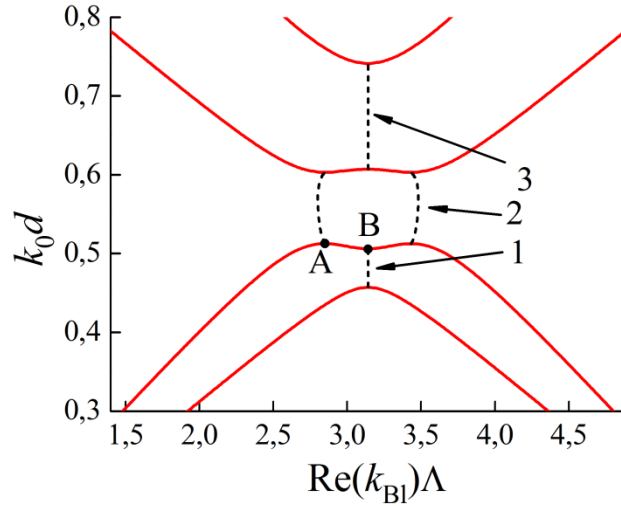


Рисунок 18 – Сверхрасширенная картина дисперсионной зависимости частоты $k_0 d$ от $\text{Re}(k_{Bl})\Lambda$ (d – толщины слоев, $\Lambda = 2d$ – период ФК). Точки сплошных линий отвечают бегущим волнам, точки пунктирных линий принадлежат ЗЗ. 1 и 3 – бриллюэновские ЗЗ, 2 – вырожденная ЗЗ. А – граница вырожденной ЗЗ, В – граница бриллюэновской ЗЗ.

На графике (рисунок 18) есть три области, обозначенные 1, 2 и 3 (пунктирные линии). Это области частот, в которых $\text{Im}(k_{Bl}(k_0)) \neq 0$ то есть это запрещенные зоны. Используя $\text{Re}(k_{Bl}(k_0))$, можем классифицировать ЗЗ 1 и 3 как бриллюэновские ЗЗ, а ЗЗ 2 – как вырожденную ЗЗ. Нижний край вырожденной запрещенной зоны обозначен точкой А, верхний край ближайшей бриллюэновской запрещенной зоны обозначен точкой В. Вблизи точки В зависимость $k_0(k_{Bl})$ (описывающую бегущие волны) можно разложить

$$k_0(k_{Bl}) = a + b \left(k_{Bl} - \frac{\pi}{\Lambda} \right)^2 + c \left(k_{Bl} - \frac{\pi}{\Lambda} \right)^4, \quad (28)$$

при этом оказывается, что $b > 0$. Действительно, несложно заметить, что дисперсионная кривая является вогнутой в точке В. При плавном изменении параметров системы положение точек А и В плавно меняется. При этом точка А может плавно двигаться вдоль сплошной кривой налево и направо и даже (пройдя

через точку В) может подняться вдоль бриллюэновской границы $k_{Bl} = \frac{\pi}{\Lambda}$ (см. рисунок 19).

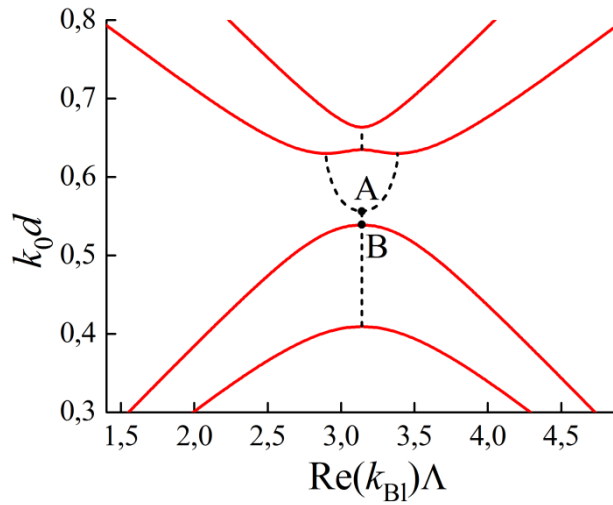


Рисунок 19 – Сверхрасширенная картина дисперсионной зависимости частоты $k_0 d$ от $\text{Re}(k_{Bl})\Lambda$ (d – толщины слоев, $\Lambda = 2d$ – период ФК). Точки сплошных линий отвечают бегущим волнам, точки пунктирных линий принадлежат ЗЗ. А – граница вырожденной ЗЗ, В – граница бриллюэновской ЗЗ.

Если в этом случае около точки В разложить зависимость $k_0(k_{Bl})$ так же, как в (28), то оказывается, что $b < 0$.

Поскольку В есть не что иное, как обыкновенная граница бриллюэновской ЗЗ, то в обоих случаях $b \neq 0$. Однако, пока точка А лежит на дисперсионной кривой левее точки В, $b > 0$. А когда точка А лежит на границе зоны Бриллюэна выше точки В, $b < 0$. При этом из положения на рисунке 18 в положение на рисунке 19 система переходит путем непрерывных преобразований своих параметров, то есть точка А, непрерывно двигаясь вверх вдоль дисперсионной кривой, доходит до точки В и затем поднимается вверх. Таким образом, когда точка А проходит через точку В, параметр разложения b меняет знак. Следовательно, в момент, когда точки А и В совпадают (см. рисунок 20) $b = 0$ и разложение в точке В принимает вид

$$k_0(k_{Bl}) = a + c \left(k_{Bl} - \frac{\pi}{\Lambda} \right)^4 \quad (29)$$

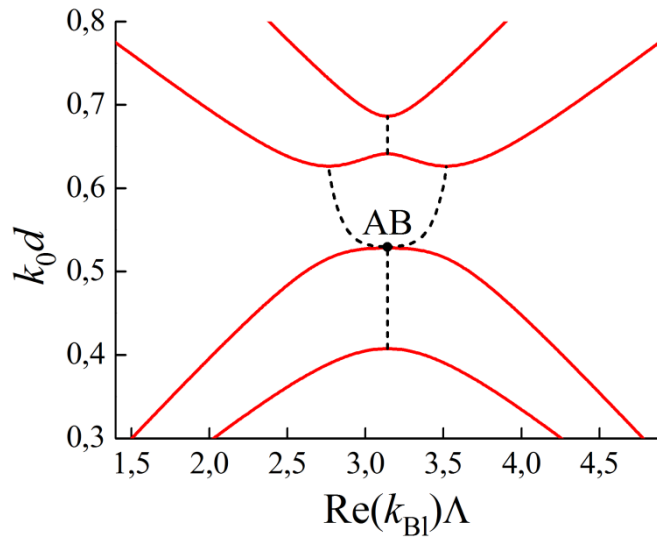


Рисунок 20 – Сверхрасширенная картина дисперсионной зависимости частоты $k_0 d$ от $\text{Re}(k_{Bl})\Lambda$ (d – толщины слоев, $\Lambda = 2d$ – период ФК). Точки сплошных линий отвечают бегущим волнам, точки пунктирных линий принадлежат ЗЗ.

А – граница вырожденной ЗЗ, В – граница бриллюэновской ЗЗ.

Численные расчеты подтверждают приведенные рассуждения. На рисунке 9 приведены результаты численных расчетов зависимости коэффициента b в разложении (28) от расстояния Δ (по частоте в единицах $k_0 d$) между точками А и В. Расчеты проводились для ФК с периодом из двух слоев одноосного немагнитного материала одинаковой толщины d . Оптические оси слоев лежат в плоскости слоев. Угол между оптическими осями слоев $0,5$ рад. Обыкновенные диэлектрические проницаемости первого и второго слоев равны соответственно $\varepsilon_1^{ord} = 5,0$ и $\varepsilon_2^{ord} = 6,5$, необыкновенные менялись от $6,2$ до $6,53$ для первого слоя и от $5,7$ до $6,03$ для второго слоя. Как видно из рисунка 21, при стремлении расстояния Δ между точками А и В к нулю стремится к нулю и коэффициент b в разложении (28).

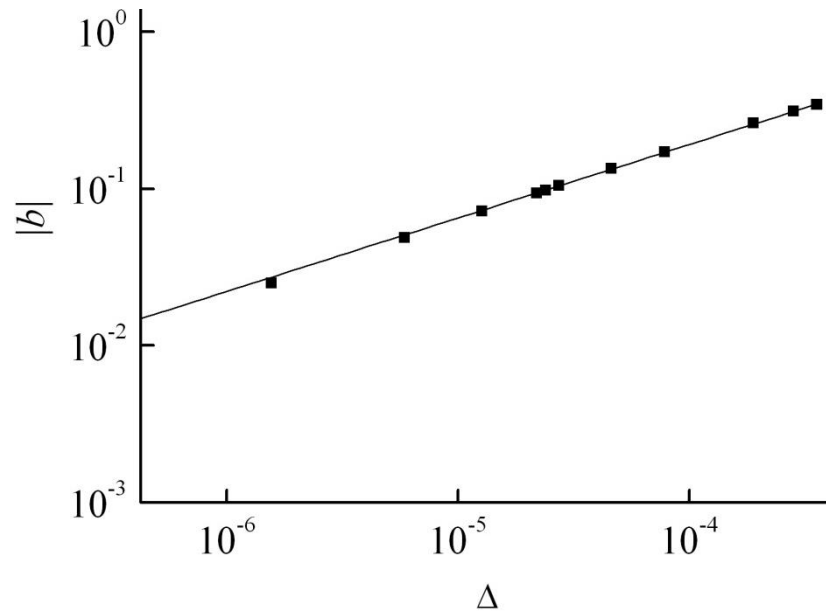


Рисунок 21 – Зависимость коэффициента b в разложении (2) от расстояния (по частоте) Δ между границами А и В вырожденной и бриллюэновской ЗЗ. Параметры ФК приведены в тексте. Квадраты – результаты численных расчетов, прямая – линия тренда, проведенная через квадраты.

Заметим, что хотя все предыдущие рассуждения приводились на примере анизотропных ФК, они также справедливы и для магнитофотонных кристаллов со слоями из анизотропных материалов с параллельными оптическими осями слоев.

Таким образом, из приведенных качественных рассуждений и результатов численных расчетов следует, что вырожденная граница запрещенной зоны возникает тогда, когда происходит касание границы бриллюэновской запрещенной зоны и границы вырожденной запрещенной зоны. То есть вырожденная граница запрещенной зоны формируется тогда, когда в ФК некоторая частота (которая и будет частотой k_0^* вырожденной границы ЗЗ) является одновременно границей бриллюэновской и вырожденной запрещенных зон. Данный вывод справедлив для любого одномерного ФК из анизотропных и гиротропных материалов. При этом вырожденная ЗЗ, участвующая в формировании вырожденной границы ЗЗ, может быть образована не только на частотах вдали от бриллюэновских ЗЗ, но и на частотах пересечения двух бриллюэновских ЗЗ, соответствующих разным блоховским модам. Таким

образом, обосновано существование ФК, в которых реализуется вырожденная граница 33 и соответствующая замороженная мода, и указаны достаточные условия формирования вырожденной границы.

Взаимодействие поляризационно-вырожденных запрещенных зон разного типа

Вырожденные запрещенные зоны (ВЗЗ) могут формироваться не только в МФК. Например, если рассмотреть фотонный кристалл, период которого состоит из двух анизотропных слоев, оси анизотропии которых не коллинеарны, то в такой системе даже без намагничивания уже могут существовать поляризационно-вырожденные запрещенные зоны. Эти зоны были впервые экспериментально обнаружены Шольцом [44], а затем (хотя и не вполне корректно, что в частности относится к знаку мнимой части) были интерпретированы Ехом [6]. Поскольку, так же как и в МФК, эти зоны образуются за счет смешивания гармоник разной поляризации, они также вырождены по поляризации. Чтобы их разделить с рассмотренными ранее в данной главе, будем их называть анизотропными вырожденными запрещенными зонами, рассмотренные ранее – гиротропными вырожденными запрещенными зонами.

Рассмотрим теперь фотонный кристалл, период которого состоит из двух слоев: оба слоя – из анизотропного магнитооптического материала, но обладающие разной анизотропией. Пусть оси анизотропии параллельны слоям системы и друг другу. В такой системе могут одновременно наблюдаться и гиротропные вырожденные запрещенные зоны (при намагничивании ФК), и анизотропные вырожденные запрещенные зоны (при отклонении осей анизотропии).

Поскольку анизотропные ВЗЗ и гиротропные ВЗЗ формируются в одной и той же области частот (в области, где пересекаются дисперсионные кривые

невозмущенного ФК), возникает вопрос, какими будут ВЗЗ в случае, если работают оба механизма, т.е. если в ФК имеются и гиротропные, и анизотропные слои, и ориентация осей анизотропии меняется от слоя к слою. В частности, какой будет ширина такого рода анизотропно-гиротропной ВЗЗ, и может ли один механизм компенсировать другой, так что ЗЗ закроется.

Ограничимся случаем нормального падения волны. Для вычисления характеристик ВЗЗ будем пользоваться теорией возмущений в предположении малых периодических в пространстве изменений параметров среды на фоне их однородных средних значений.

На рисунке 22 изображена рассматриваемая структура: одномерный слоистый ФК с периодом из двух слоев. Волны распространяются по нормали к границам слоев. В качестве оси, вдоль которой меняются характеристики ФК, выберем ось z .

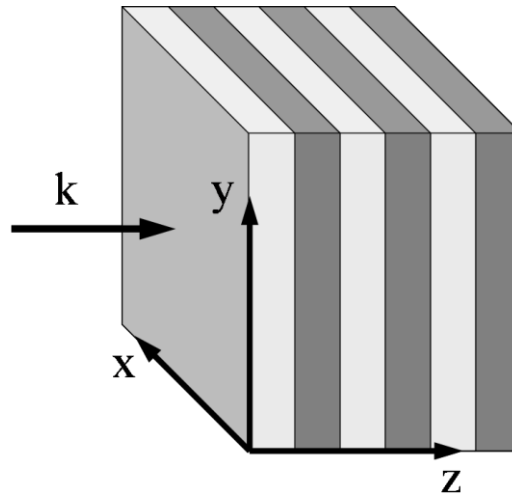


Рисунок 22 – Рассматриваемая структура.

Будем считать, что рассматриваемый ФК состоит из анизотропно-гиротропного материала, причем одна из осей анизотропии всегда направлена вдоль оси z , магнитное поле также направлено вдоль оси z . В таком случае тензор диэлектрической проницаемости в главных осях будет иметь вид:

$$\hat{\varepsilon}'(z) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x(z) & -ig(z) & 0 \\ ig(z) & \varepsilon_y(z) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_x(z), \varepsilon_y(z), g(z)$ – периодические действительные функции z , $g(z)$ описывает гиротропию. Однако две другие оси анизотропии могут менять свою ориентацию, поворачиваясь вокруг оси z на угол $\alpha(z)$, также периодически зависящий от z . Поэтому в рассматриваемой нами системе координат xuz (изображенной на рисунке 22) тензор диэлектрической проницаемости будет иметь вид $\hat{\varepsilon}(z) = \hat{A}(z)\hat{\varepsilon}'(z)\left(\hat{A}(z)\right)^{-1}$, где $\hat{A}(z)$ – матрица поворота вокруг оси z на угол $\alpha(z)$:

$$\hat{A}(z) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(z) & -\sin \alpha(z) & 0 \\ \sin \alpha(z) & \cos \alpha(z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\hat{\varepsilon}(z) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x(z)\cos^2 \alpha(z) + \varepsilon_y(z)\sin^2 \alpha(z) & \frac{\sin 2\alpha(z)}{2}(\varepsilon_x(z) - \varepsilon_y(z)) - ig(z) & 0 \\ \frac{\sin 2\alpha(z)}{2}(\varepsilon_x(z) - \varepsilon_y(z)) + ig(z) & \varepsilon_y(z)\cos^2 \alpha(z) + \varepsilon_x(z)\sin^2 \alpha(z) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (30)$$

Из вида тензора $\hat{\varepsilon}(z)$ и из предположения о распространении волны по нормали к слоям можно заключить, что поле \vec{E} является поперечным. Таким образом, приходим к необходимости решать уравнение Максвелла в виде

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} + k_0^2 \hat{\varepsilon}(z) \vec{E} = 0 \quad (31)$$

с тензором $\hat{\varepsilon}(z)$, определяемым (30).

При построении теории возмущений для решения (31) будем предполагать, что периодические колебания $\Delta\varepsilon_x(z), \Delta\varepsilon_y(z), \Delta g(z)$ функций $\varepsilon_x(z), \varepsilon_y(z), g(z)$ малы по сравнению с их средними значениями $\varepsilon_{x0} = \varepsilon_x(z) - \Delta\varepsilon_x(z)$, $\varepsilon_{y0} = \varepsilon_y(z) - \Delta\varepsilon_y(z)$, $g_0 = g(z) - \Delta g(z)$, что также мала $\alpha(z)$. Тогда (31) перейдет в

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon_{x0} E_x - ik_0^2 g_0 E_y + k_0^2 \Delta \varepsilon_x(z) E_x + k_0^2 \left((\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0}) \alpha(z) - i \Delta g(z) \right) E_y &= 0 \\
\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon_{y0} E_y + ik_0^2 g_0 E_x + k_0^2 \Delta \varepsilon_y(z) E_y + k_0^2 \left((\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0}) \alpha(z) + i \Delta g(z) \right) E_x &= 0
\end{aligned} \tag{32}$$

Такая запись неудобна, т.к. связь между E_x и E_y осуществляется не только посредством малых слагаемых. Удобнее перейти в базис поляризаций волн, являющихся собственными решениями невозмущенных уравнений (32), т.е.

$$E_r = E_x - i\varphi E_y \quad \text{и} \quad E_l = E_y - i\varphi E_x. \quad \text{Здесь} \quad \varphi = \left(\sqrt{(\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0})^2 + 4g_0^2} - (\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0}) \right) / 2g_0.$$

Тогда (32) перейдут в

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 E_r}{dz^2} + k_1^2 E_r + k_0^2 A_r(z) E_r + ik_0^2 B(z) E_l + k_0^2 (\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0}) \alpha(z) E_l &= 0 \\
\frac{d^2 E_l}{dz^2} + k_2^2 E_l + k_0^2 A_l(z) E_l - ik_0^2 B(z) E_r + k_0^2 (\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0}) \alpha(z) E_r &= 0
\end{aligned} \tag{33}$$

$$A_r(z) = \frac{\Delta \varepsilon_x(z) + 2\varphi \Delta g(z) + \varphi^2 \Delta \varepsilon_y(z)}{1 + \varphi^2}, \quad A_l(z) = \frac{\Delta \varepsilon_y(z) - 2\varphi \Delta g(z) + \varphi^2 \Delta \varepsilon_x(z)}{1 + \varphi^2},$$

$$B(z) = \frac{(\Delta \varepsilon_x(z) - \Delta \varepsilon_y(z))\varphi + \Delta g(z)(\varphi^2 - 1)}{1 + \varphi^2},$$

$$\frac{k_1^2}{k_0^2} = n_1^2 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{x0} + \varepsilon_{y0} + \sqrt{(\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0})^2 + 4g_0^2} \right),$$

$$\frac{k_2^2}{k_0^2} = n_1^2 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{x0} + \varepsilon_{y0} - \sqrt{(\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0})^2 + 4g_0^2} \right).$$

В уравнениях (33) возмущения описываются малыми функциями $A_r(z), A_l(z), B(z), \alpha(z)$, ввиду малости $\Delta \varepsilon_x(z), \Delta \varepsilon_y(z), \Delta g(z)$.

Т.к. среда является периодической, то общее решение можно разложить по блоховским волнам:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r(z) \\ E_l(z) \end{pmatrix} = \sum_j \begin{pmatrix} R_j \\ L_j \end{pmatrix} \exp(i(k_{Bl} + jG)z), \tag{34}$$

где G – вектор обратной решетки ФК, k_{Bl} – блоховский волновой вектор.

Разлагая функции возмущения в ряд Фурье:

$$A_r(z) = \sum_j A_{r,j} \exp(ijGz),$$

$$A_l(z) = \sum_j A_{l,j} \exp(ijGz),$$

$$B(z) = \sum_j B_j \exp(ijGz),$$

$$\alpha(z) = \sum_j \alpha_j \exp(ijGz),$$

подставляя вместе с (34) в (33) и приравнивая коэффициенты при каждой из гармоник к нулю, получим бесконечную систему связанных линейных уравнений:

$$\begin{aligned} -(k_{Bl} + jG)^2 R_j + k_1^2 R_j + k_0^2 \sum_{j'} A_{r,j-j'} R_{j'} + ik_0^2 \sum_{j'} B_{j-j'} L_{j'} + k_0^2 (\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0}) \sum_{j'} \alpha_{j-j'} L_{j'} &= 0 \\ -(k_{Bl} + jG)^2 L_j + k_2^2 L_j + k_0^2 \sum_{j'} A_{l,j-j'} L_{j'} - ik_0^2 \sum_{j'} B_{j-j'} R_{j'} + k_0^2 (\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0}) \sum_{j'} \alpha_{j-j'} R_{j'} &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Из предположения о том, что период ФК состоит из двух слоев, следует, что при определенном выборе начала координат по оси z функции $A_r(z), A_l(z), B(z), \alpha(z)$ являются четными, а коэффициенты их Фурье-разложения действительными. $A_{r,j} = A_{r,-j}, A_{l,j} = A_{l,-j}, B_j = B_{-j}, \alpha_j = \alpha_{-j}$.

В [25] показано, что одновременное выполнение при некоторой частоте k_0 условий

$$k_1^2 - k_{Bl}^2 \approx 0 \text{ и } k_2^2 - (k_{Bl} - G)^2 \approx 0 \quad (36)$$

(либо $k_2^2 - k_{Bl}^2 \approx 0$ и $k_1^2 - (k_{Bl} - G)^2 \approx 0$) соответствует образованию ВЗЗ. Далее будем рассматривать только условия (7). При выполнении второй пары условий рассуждения аналогичны. Можно переписать (6) в виде:

$$\begin{aligned} R_j &= \frac{k_0^2 \sum_{j' \neq j} A_{r,j-j'} R_{j'} + ik_0^2 \sum_{j' \neq j} B_{j-j'} L_{j'} + k_0^2 (\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0}) \sum_{j' \neq j} \alpha_{j-j'} L_{j'}}{(k_{Bl} + jG)^2 - k_1^2}, \\ L_j &= \frac{k_0^2 \sum_{j' \neq j} A_{l,j-j'} L_{j'} - ik_0^2 \sum_{j' \neq j} B_{j-j'} R_{j'} + k_0^2 (\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0}) \sum_{j' \neq j} \alpha_{j-j'} R_{j'}}{(k_{Bl} + jG)^2 - k_2^2}. \end{aligned}$$

Тогда при одновременном выполнении условий (36) знаменатели в выражениях для R_0 и L_{-1} стремятся к нулю. Это позволяет положить амплитуды всех мод, кроме R_0 и L_{-1} , равными нулю и перейти к системе двух уравнений:

$$\begin{aligned} (k_1^2 - k_{Bl}^2)R_0 + ik_0^2 B_1 L_{-1} + (\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0})k_0^2 \alpha_1 L_{-1} &= 0, \\ (k_2^2 - (k_{Bl} - G)^2)L_{-1} - ik_0^2 B_1 R_0 + (\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0})k_0^2 \alpha_1 R_0 &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

Детерминант матрицы системы (37) должен равняться нулю, что определяет дисперсионную зависимость вблизи вырожденной запрещенной зоны:

$$(k_1^2 - k_{Bl}^2)(k_2^2 - (k_{Bl} - G)^2) - k_0^4 \left((\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0})^2 \alpha_1^2 + B_1^2 \right) = 0. \quad (38)$$

Приведем выводы из уравнения (38) (подробный анализ см. в [25]). Центру ВЗЗ соответствует частота $k_0^* = G/(n_1 + n_2)$ (при этой частоте одновременно удовлетворяются условия (36)). При этом, если выражение под знаком модуля не равно нулю, на этой частоте k_{Bl} имеет мнимую часть. Находя из (37) частоты, на которых мнимая часть k_{Bl} обращается в нуль, можно определить границы ВЗЗ, а тем самым и ее ширину. Это легко сделать в предположении малости выражения под знаком модуля, а значит и малого отклонения границ ВЗЗ от k_0^* .

Ширина ВЗЗ при наличии двух механизмов образования ВЗЗ равна

$$\Delta k_0^{GA} = \frac{2k_0^* \sqrt{(\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0})^2 \alpha_1^2 + B_1^2}}{(n_1 + n_2) \sqrt{n_1 n_2}}. \quad (39)$$

Теперь можно определить, какой вклад в ширину зоны вносит каждый из механизмов образования ВЗЗ.

При наличии лишь первого механизма, т.е. когда $\Delta\alpha(z) \neq 0$, но $g(z) \equiv 0$, получаем из (39) ширину анизотропной ВЗЗ:

$$\Delta k_0^A = \frac{2|\sqrt{\varepsilon_{x0}} - \sqrt{\varepsilon_{y0}}| |\alpha_1| G}{(\sqrt{\varepsilon_{x0}} + \sqrt{\varepsilon_{y0}})^4 \sqrt{\varepsilon_{x0} \varepsilon_{y0}}}.$$

Если считать $g_0 \ll |\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0}|$ (что реализуется почти всегда ввиду малости g в реальных диэлектрических средах), то $n_1 \approx \sqrt{\varepsilon_{0x}}$ и $n_2 \approx \sqrt{\varepsilon_{0y}}$, и

$$\Delta k_0^A \approx \frac{2k_0^* |(\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0}) \alpha_1|}{(n_1 + n_2) \sqrt{n_1 n_2}}. \quad (40)$$

При наличии лишь второго механизма, т.е. когда $\Delta\alpha(z) \equiv 0$, получаем из (39) ширину гиротропной ВЗЗ:

$$\Delta k_0^G = \frac{2k_0^* |B_1|}{(n_1 + n_2) \sqrt{n_1 n_2}}. \quad (41)$$

Из (39) – (41) следует, что

$$\Delta k_0^{GA} = \sqrt{(\Delta k_0^A)^2 + (\Delta k_0^G)^2}. \quad (42)$$

Итак, для ФК с периодом из двух слоев ширина ВЗЗ, возникающей под действием обоих механизмов, определяется лишь ширинами ВЗЗ, возникающих под действием только одного из двух механизмов, по «теореме Пифагора». При этом не требуется знания каких-либо дополнительных характеристик ФК. Ниже приводятся примеры численных расчетов, подтверждающие справедливость (42).

На рисунке 23 изображена зависимость Δk_0^{GA} от Δk_0^G при фиксированном значении Δk_0^A . Все ширины зон нормированы на частоту центра зоны k_0^* . Сплошная линия описывается формулой (42), точки – результат точных вычислений Δk_0^{GA} с помощью метода Т-матриц [49]. Δk_0^G и Δk_0^A также вычислялись с помощью этого метода. На рисунке 24 – то же, что и на рисунке 23, только переменной является Δk_0^A при фиксированной Δk_0^G .

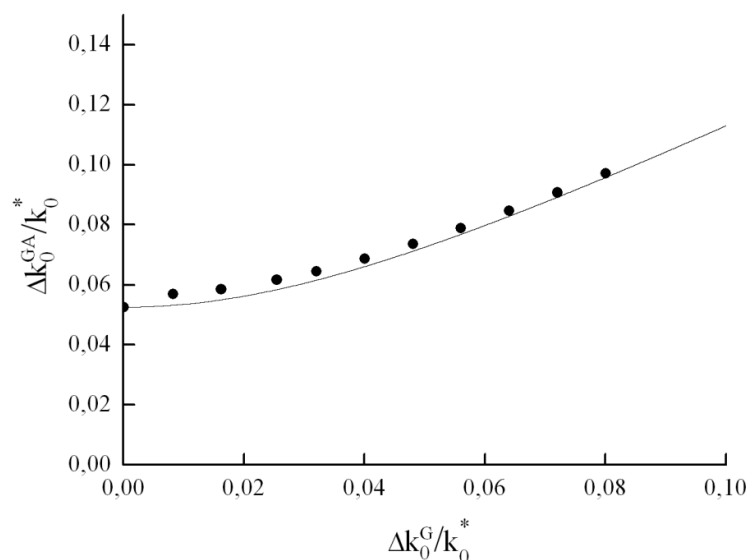


Рисунок 23 – Зависимость Δk_0^{GA} от Δk_0^G при фиксированной Δk_0^A . Сплошная кривая вычислена по «теореме Пифагора», точки – точные значения, вычисленные по методу Т-матриц. Параметры первого слоя ФК: толщина – d , $\varepsilon_x = 1.2$, $\varepsilon_y = 7.9$, $\alpha = -0.1$ rad; параметры второго слоя: толщина – $2d$, $\varepsilon_x = 3.0$, $\varepsilon_y = 8.1$, $\alpha = 0.05$ rad. Остальные параметры менялись.

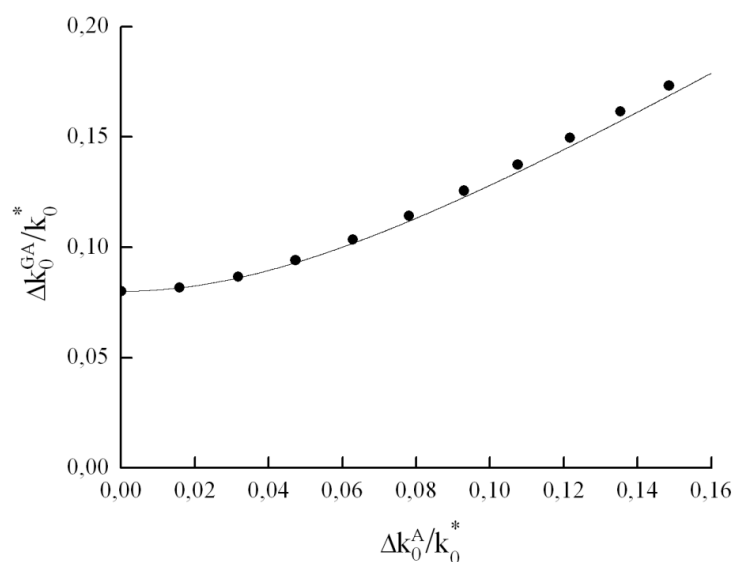


Рисунок 24 – Зависимость Δk_0^{GA} от Δk_0^A при фиксированной Δk_0^G . Сплошная кривая вычислена по «теореме Пифагора», точки – точные значения, вычисленные по методу Т-матриц. Параметры первого слоя ФК: толщина – d , $\varepsilon_x = 1.2$, $\varepsilon_y = 7.9$, $g = 1.0$; параметры второго слоя: толщина – $2d$, $\varepsilon_x = 3.0$, $\varepsilon_y = 8.1$, $g = 2.0$. Остальные параметры менялись.

Видно, что формула (42) дает результат, хорошо согласующийся с предсказанным, даже при довольно широких ВЗЗ. Однако, в общем случае она неприменима для ФК с тремя и более слоями в периоде.

Таким образом, для ФК, в котором одновременно могут формироваться вырожденные запрещенные зоны разных типов, ширина вырожденной запрещенной зоны, возникающей под действием обоих механизмов Δk_0^{GA} , складывается по «теореме Пифагора» из ширин запрещенных зон для каждого механизма в отдельности (Δk_0^A и Δk_0^G)

$$\Delta k_0^{GA} = \sqrt{(\Delta k_0^A)^2 + (\Delta k_0^G)^2}.$$

При этом не требуется знания каких-либо дополнительных характеристик ФК.

Отсутствие эффекта Бормана на границах поляризационно-вырожденной запрещенной зоны

Почти все применения ФК связаны с существованием запрещенных зон, которые позволяют создавать высокодобротные микрорезонаторы и оптические волноводы [51]. Другая группа приложений ФК основана на возможности управлять распределением поля на периоде. Эффект перераспределения поля в элементарной ячейке ФК в зависимости от оптической частоты называют оптическим эффектом Бормана [28, 29, 52-54]. При определенных условиях изменение частоты может переместить узлы и пучности распределения электромагнитного поля к желаемым местоположениям в элементарной ячейке. Например, такие местоположения могут быть посреди магнитооптических слоев кристалла или посреди слоя, показывающего самое сильное поглощение. Это позволяет увеличить желаемый линейный или нелинейный оптический ответ одного из элементов фотонного кристалла, подавляя нежелательные эффекты. В частности, можно увеличить эффекты Фарадея или Керра в МФК и/или уменьшить потери [54].

Оптический эффект Бормана наиболее ярко себя проявляет на границе запрещенной зоны [54-55]. Например, рассмотрим слоистый фотонный кристалл, период которого состоит из двух изотропных слоев. Тогда на частоте нижней границы запрещенной зоны электрическое поле будет сконцентрировано преимущественно в слое с большой диэлектрической проницаемостью. Соответственно, на частоте верхней границы запрещенной зоны, поле будет сконцентрировано преимущественно в слое с меньшей диэлектрической проницаемостью (см. рисунок 25).

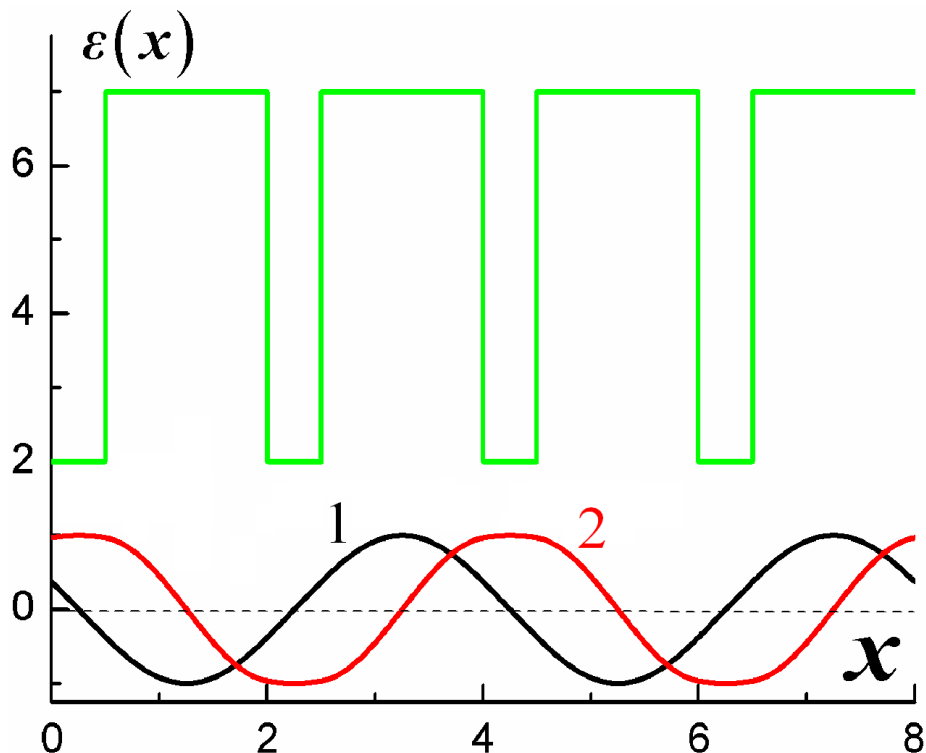


Рисунок 25 – Распределение амплитуды электрического поля блоховской волны в фотонном кристалле. Зеленым показан профиль диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x)$. Кривая 1 (черного цвета) соответствует частоте нижней границы запрещенной зоны, кривая 2 (красного цвета) соответствует частоте верхней границы запрещенной зоны.

В данном разделе рассмотрим распределение поля на границе вырожденной запрещенной зоны. Период рассматриваемого ФК состоит из двух слоев. Один из них анизотропный, с диэлектрическим тензором

$$\hat{\varepsilon}_a = \begin{pmatrix} 3.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

Второй слой – гиротропный с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_g = 4$.

Соответствующий тензор $\hat{\varepsilon}_g = \begin{pmatrix} \varepsilon_g & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_g & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_g \end{pmatrix}.$

Толщина анизотропного слоя d_1 , толщина гиротропного слоя $d_2 = 0.2d_1$. Внешнее магнитное поле приложено перпендикулярно к слоям, и $g = 0.5$. Результаты вычислений (полученных с помощью метода Т-матриц) представлены на рисунке 26, где показана относительная доля энергии блоховской волны, концентрированная в гиротропном слое. Вырожденная запрещенная зона формируется около частоты $k_0(d_1 + d_2) \approx 1.89$.

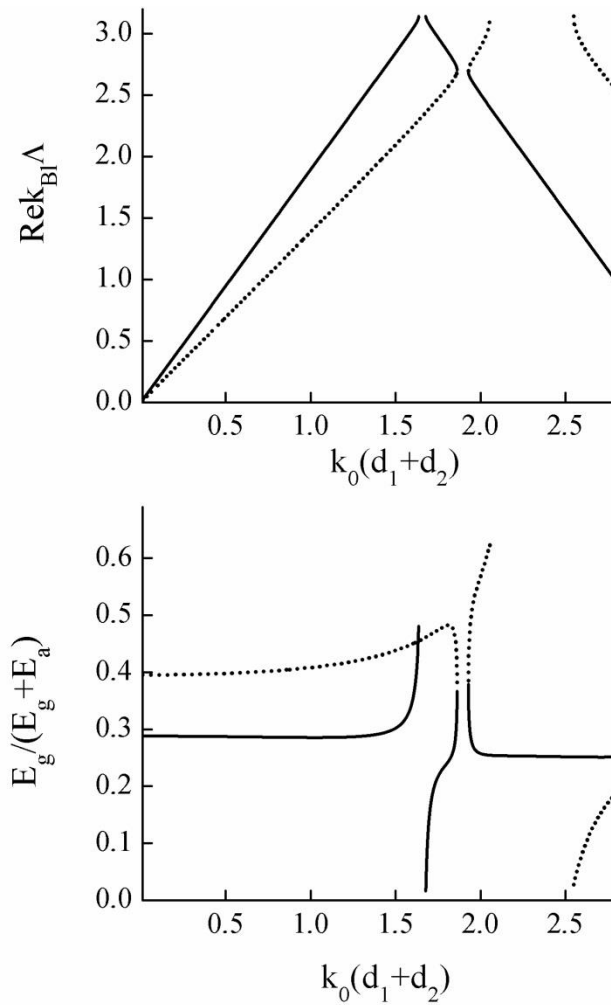


Рисунок 26 – Верхний график: дисперсионная кривая. Нижний график: относительная часть энергии блоховской волны, сконцентрированная в гиротропном слое. Пунктирная и сплошная кривые соответствуют разным решениям.

Рисунок 26 показывает отсутствие эффекта Бормана вблизи границы вырожденной запрещенной зоны (около частоты $k_0(d_1 + d_2) \approx 1.89$), при этом эффект Бормана присутствует на обеих границах обыкновенной запрещенной зоны ($k_0(d_1 + d_2) \approx 1.6$ и $k_0(d_1 + d_2) \approx 2.4$).

Формирование запрещенных зон в периодически намагниченном анизотропном материале

Обыкновенно вырожденная запрещенная зона значительно уже, чем обыкновенная бриллюэновская запрещенная зона. Поэтому может показаться, что

малость гиротропной вырожденной зоны является её неотъемлемым свойством, обусловленным её природой, связанной с взаимодействием волн разной поляризации. С другой стороны, параметр этого взаимодействия, ответственный за формирование вырожденной запрещенной зоны, пропорционален недиагональному элементу диэлектрического тензора, и этот недиагональный элемент является чрезвычайно малой величиной для естественных магнитооптических сред. Далее будет показано, что это не общий случай. В частности, если бриллюэновская и вырожденные запрещенные зоны одновременно возникают при приложении магнитного поля, они не только могут быть сравнимы, но и более того, вырожденная запрещенная зона может быть значительно шире бриллюэновской.

Рассмотрим слоистый анизотропно-гиротропный ФК, состоящий из периодически расположенных анизотропных и анизотропно-гиротропных слоев (см. рисунок 27).

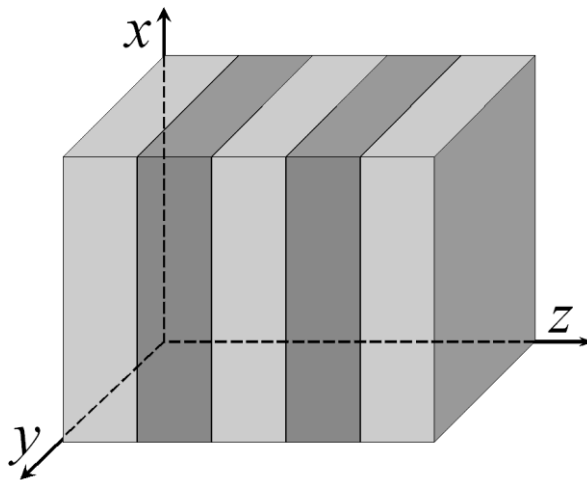


Рисунок 27 – Рассматриваемая структура.

Пусть в отсутствие намагничивающего поля оба слоя описываются одним анизотропным тензором

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

После намагничивания анизотропный магнитооптический слой будет описываться диэлектрическим тензором

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & iq & 0 \\ -iq & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Другими словами, без намагничивания имеется однородная среда, а после намагничивания – периодическая структура ФК, в которой можно ожидать появления как вырожденных, так и бриллюэновских запрещенных зон.

Для нахождения зонной структуры используем модифицированный метод Т-матриц, изложенный в первом разделе данной главы.

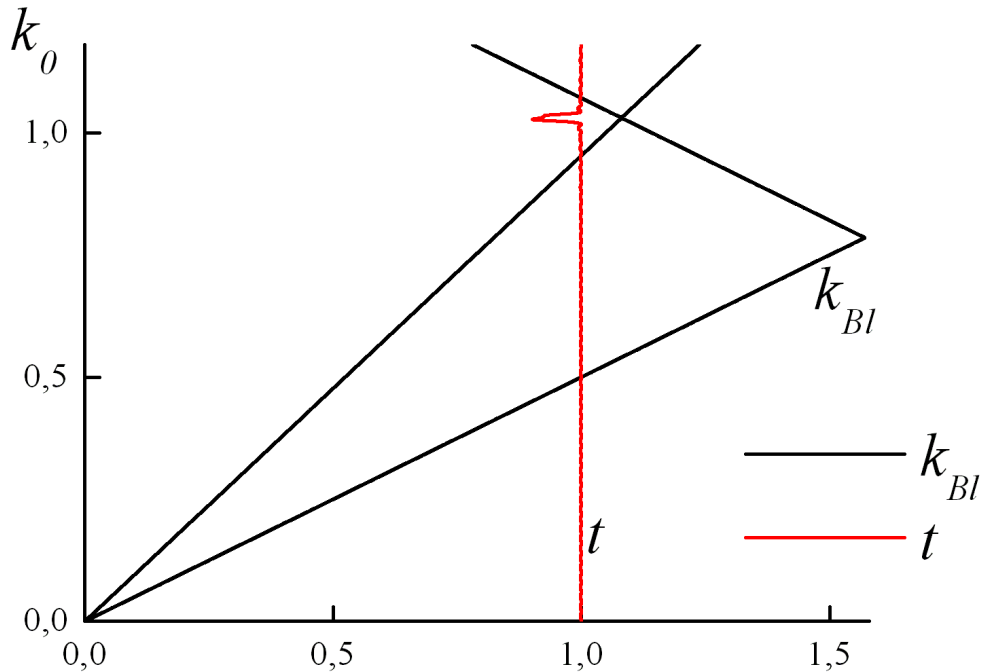


Рисунок 28 – Дисперсионная кривая (черная кривая) и коэффициент прохождения (красная кривая) намагниченной системы. Параметры рассматриваемого ФК $\varepsilon_{xx} = 1.1$, $\varepsilon_{yy} = 4.0$, $q = 0.02$, $d_1 = d_2 = D/2$. Частота и блоховский вектор нормированы на толщину слоя $D/2$. Поле падающей волны поляризовано параллельно x . Полная толщина системы 150 слоев (75 периодов).

На рисунке 28 видно существование вырожденной запрещенной зоны в спектре коэффициента прохождения, однако, разрешение рисунка не позволяет показать вырожденную запрещенную зону в дисперсионной кривой. Увеличенный рисунок

области, соответствующей вырожденной запрещенной зоне представлен на рисунке 29. Видно, что вырожденная зона проявляет себя не только в коэффициенте прохождения, но также и в дисперсионной кривой.

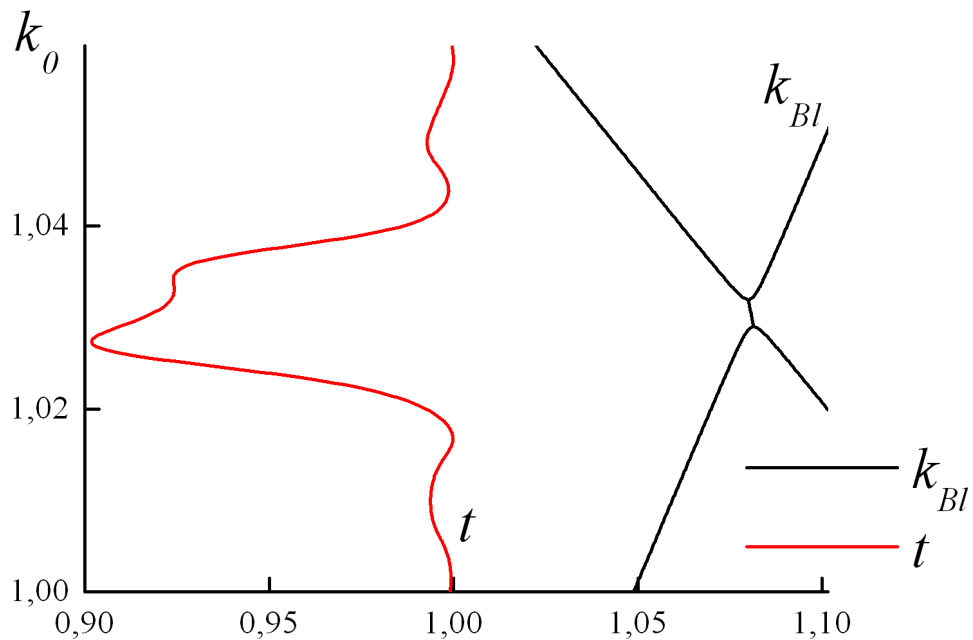


Рисунок 29 – Увеличенная область (около частот, соответствующих вырожденной запрещенной зоне) рисунка 28. Дисперсионная кривая (черная кривая) и коэффициент прохождения (красная кривая) намагниченной системы. Все параметры как на рисунке 28.

Однако, на рисунке 28 не видно даже намек на существование бриллюэновской зоны ни в спектре прохождения, ни в дисперсионной кривой. Тем не менее, тщательное расчет показывает, что бриллюэновская зона существует, однако, её ширина пропорциональна q^2 , и поэтому очень мала по сравнению с гиротропной, ширина которой пропорциональна q .

Для внесения ясности в разницу между вырожденной и бриллюэновской зонами сравним намагниченный и нанамгниченный случай (для того чтобы сделать рисунок более репрезентативным, нужно значительно увеличить q , например, до $q = 0.5$). Данные расчета представлены на рисунке 30.

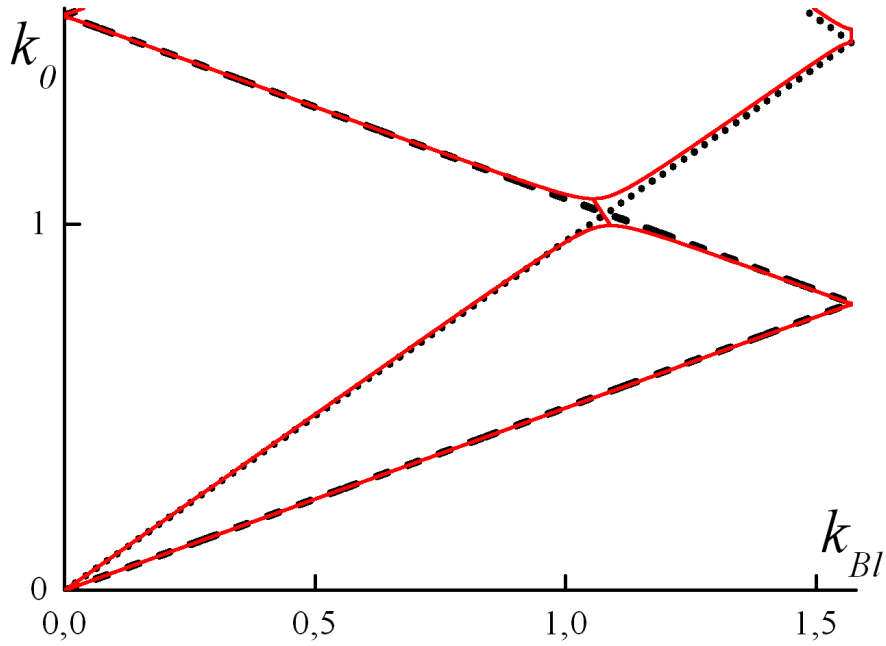


Рис.30. Дисперсионные кривые для намагниченной системы (красная кривая) и ненамагниченной системы (черные кривые). Точечная и пунктирная кривые соответствуют различным поляризациям электрического поля. Параметры рассматриваемого ФК $\varepsilon_{xx} = 1.1$, $\varepsilon_{yy} = 4.0$, $q = 0.5$, $d_1 = d_2 = D/2$. Частота и блоховский вектор нормированы на $D/2$.

Вырожденная запрещенная зона формируется около точки пересечения дисперсионных кривых разной поляризации ненамагниченного ФК. То есть в области частот, при которых система выглядит изотропной. Эту точку можно рассматривать как точку эффективной изотропии [18]. Наличие такой точки необходимо для формирования вырожденной запрещенной зоны, поскольку она формируется благодаря каплингу между решениями с различной поляризацией.

Для внесения ясности во влияние анизотропии на МО явления рассмотрим одноосный магнитооптический кристалл. Для намагничивающего поля вдоль оси z тензор диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & iq & 0 \\ -iq & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Квадрат показателя преломления для волны, распространяющейся вдоль

намагничиваемого поля

$$n^2 = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + q^2}.$$

Случай большой анизотропии:

$$\left|\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right| \gg |q|$$

$$n^2 \approx \left(\frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right) \pm \frac{q^2}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}$$

$$n_{right} - n_{left} \sim q^2$$

Случай маленькой анизотропии:

$$1 \gg |q| \gg \left|\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right|$$

$$n^2 \approx \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm q$$

$$n_{right} - n_{left} \sim q$$

Таким образом, видно, что большая анизотропия приводит к качественному изменению магнитооптических эффектов. Анизотропия существенно подавляет магнитооптические свойства.

Именно поэтому вблизи точки эффективной изотропии формируется относительно большая вырожденная запрещенная зона (шириной порядка q), а вдали от эффективной изотропии возникает билилюэновская зона (шириной порядка q^2).

Управляемый электрическим полем волноводный фильтр Шольца

Оптические фильтры на основе ФК, работающие на частотах вырожденных ЗЗ, были предложены в [6, 44-47]. Они представляют собой системы слоев из одноосных материалов с периодически меняющимися от слоя к слою ориентациями оптических осей (так называемые фильтры Шольца).

В [47] было предложено использовать электрооптический эффект для управления спектром пропускания многослойных фильтров Шольца. Однако, изготовление многослойных (для формирования фильтров с четкой границей частотных диапазонов прозрачности и непрозрачности требуются структуры с десятками и сотнями слоев) структур из электрооптических материалов представляет большие трудности. Электрооптические слои нужно отжигать (для

формирования кристаллической структуры), при этом свойства всех слоев заметно меняются, и сделать структуру с большим количеством слоев (50 и более) не представляется возможным.

В данном разделе предлагается волноводный фильтр на основе гофрированного (периодически модулированного по толщине) планарного волновода из электрооптического материала. Принцип работы такого фильтра аналогичен принципу работы многослойного фильтра Шольца (непропускание волн на частотах вырожденной ЗЗ). Управляя внешним электрическим полем, можно открывать и закрывать вырожденную ЗЗ. Изготовление такого волновода требует напыления лишь одного слоя электрооптического материала с последующим нанесением гофра в виде борозд на одной из поверхностей, например, фокусированным ионным пучком. На рисунке 31 представлена схема описываемого гофрированного волновода.

Для появления в спектре волновода вырожденной ЗЗ необходима связь (гибридизация) ТЕ и ТМ мод, распространяющихся в противоположных направлениях. Данная связь осуществляется благодаря наведенной внешним электрическим полем анизотропии материала волновода (связь разных поляризаций, собственные моды анизотропного волновода уже не являются ТЕ или ТМ поляризованными) и гофру (связь волн с противоположным направлением распространения благодаря отражению от гофра).

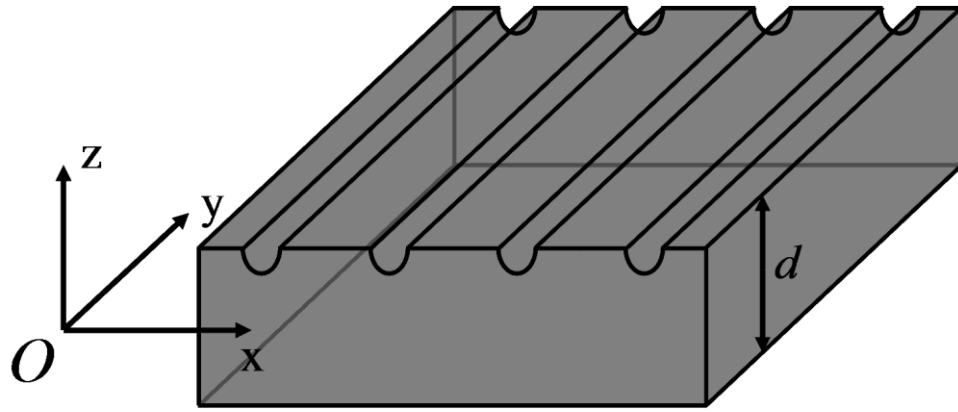


Рисунок 31 – Схема рассматриваемого планарного гофрированного волновода из анизотропного материала. Одна из главных осей тензора $\hat{\varepsilon}$ направлена вдоль оси x , две другие отклонены на некоторый угол от осей y и z . Волна в волноводе распространяется вдоль оси x . d – толщина волновода в сечении, перпендикулярном оси x .

Будем считать, что одна из границ (нижняя) волновода плоская, а другая (верхняя) периодически гофрирована, причем только в направлении оси x , т.е. толщина $d(x)$ волновода периодически меняется при движении вдоль оси x , в направлении оси y структура трансляционно инвариантна. Для упрощения будем считать волновод погруженным в вакуум. Кроме того, ограничимся рассмотрением распространения волн в волноводе вдоль оси x (составляющая k_y волнового вектора равна нулю).

При включении электрического поля в результате электрооптического эффекта материал волновода становится анизотропным, ТЕ и ТМ моды гибридизуются и более не являются независимыми, как это было в отсутствие внешнего постоянного электрического поля. При расчетах пренебрежем потерями в материалах волновода.

Расчет методом связанных мод. Для расчета характеристик вырожденной 33 гофрированного волновода воспользуемся методом связанных мод. Описание данного метода можно найти, например, в [56], а также в [57], где он фигурирует под названием «метод поперечных сечений».

Рассмотрим сечение гофрированного волновода плоскостью, параллельной координатной плоскости yz (см. рисунок 31). Пусть данное сечение пересекает ось x в точке с координатой x (т.е. сечение имеет координату x). Согласно методу поперечных сечений [57], поля в данном сечении гофрированного волновода представляются в виде линейной комбинации полей мод планарного (без гофра, с постоянным сечением) волновода с таким же распределением материальных параметров по сечению. То есть для каждого сечения гофрированного волновода строится вспомогательный планарный волновод, вид которого (в нашем случае, толщина d) зависит от координаты сечения x . В данные линейные комбинации входят, в общем случае, как поля волноводных (распространяющихся вдоль плоскости волновода и затухающих вне волновода) мод, так и поля излучательных (распространяющихся в направлениях, перпендикулярных плоскости волновода xz , и затухающих вдоль плоскости волновода) мод. Однако, как будет ясно в дальнейшем, только ограниченный набор волноводных мод имеет существенное значение для расчета характеристик вырожденной ЗЗ. Поэтому, для простоты, сразу ограничимся линейными комбинациями лишь волноводных мод.

Итак, поля в сечении с координатой x гофрированного волновода представим в виде [57]:

$$\vec{E}(x, z) = \sum_{\substack{j=-2 \\ j \neq 0}}^2 C_j(x) \vec{e}_j(x, z) e^{ik_{xj}(d(x))x}, \quad \vec{H}(x, z) = \sum_{\substack{j=-2 \\ j \neq 0}}^2 C_j(x) \vec{h}_j(x, z) e^{ik_{xj}(d(x))x} \quad (43)$$

Здесь $\vec{e}_j(x, z) e^{ik_{xj}(d(x))x}$ и $\vec{h}_j(x, z) e^{ik_{xj}(d(x))x}$ – поля j -й моды планарного волновода толщиной $d(x)$ в сечении x . Их зависимость от координаты сечения x более сложная, чем просто экспоненциальная, т.к. толщина $d(x)$ планарного волновода и его положение вдоль оси z также определяется сечением x гофрированного волновода. Будем рассматривать низкочастотный предел, когда существуют только две волноводные моды планарного волновода с $k_x > 0$ (положительные j) и две волноводные моды с $k_x < 0$ (отрицательные j).

Коэффициенты $C_j(x)$ в разложениях (43) меняются от сечения к сечению и совпадают в разложениях электрического и магнитного полей [57].

Приведем выражения для волноводных мод планарного волновода толщиной d из анизотропного материала с тензором диэлектрической проницаемости

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ 0 & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (44)$$

Вне волновода – вакуум. Выражения могут быть найдены аналитически. Используемая система координат изображена на рисунке 31, т.е. плоскость волновода совпадает с плоскостью xu . Рассмотрим только чётные моды, т.е. такие, составляющие E_y электрического поля которых являются четными функциями z . Такой выбор мод связан с тем, что в рассматриваемом низкочастотном пределе волноводные моды являются четными. Будем считать, что нижняя граница планарного волновода имеет координату $z = -d/2$, а верхняя $z = d/2$ (в данном предположении, для удобства, будут выписаны выражения для мод планарного анизотропного волновода, однако при расчете характеристик вырожденной 33 такая симметрия границ волновода относительно $z = 0$ будет в общем случае отсутствовать). В случае $k_y = 0$ волноводные (незатухающие в направлении x и затухающие в направлении $z \rightarrow \pm\infty$) моды имеют вид:

$$\vec{E} = \left[A_1 \begin{pmatrix} i \sin k_{z1} z \\ a_1 \cos k_{z1} z \\ b_1 \cos k_{z1} z \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} i \sin k_{z2} z \\ a_2 \cos k_{z2} z \\ b_2 \cos k_{z2} z \end{pmatrix} \right] e^{i(k_x x - \omega t)} \quad \text{при } -d/2 < z < d/2, \quad (45a)$$

$$\vec{E} = \left[B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{k_x^2 - k_0^2}}{k_0} \\ 0 \\ -\frac{k_x}{k_0} \end{pmatrix} \right] e^{\left(\frac{d}{2} - z\right)\sqrt{k_x^2 - k_0^2}} e^{i(k_x x - \omega t)} \quad \text{при } z > d/2, \quad (45b)$$

$$\vec{E} = \left[B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{k_x^2 - k_0^2}}{k_0} \\ 0 \\ -\frac{k_x}{k_0} \end{pmatrix} \right] e^{\left(\frac{d}{2} + z\right)\sqrt{k_x^2 - k_0^2}} e^{i(k_x x - \omega t)} \quad \text{при } z < -d/2. \quad (45\text{в})$$

Здесь k_0 – волновое число в вакууме,

$$a_i = \frac{k_0^2 \varepsilon_{yz} (k_{zi}^2 - k_0^2 \varepsilon_{xx})}{k_x k_{zi} (k_x^2 + k_{zi}^2 - k_0^2 \varepsilon_{yy})}, \quad b_i = \frac{k_{zi}^2 - k_0^2 \varepsilon_{xx}}{k_x k_{zi}}, \quad i = 1, 2,$$

$$A_1 = \frac{k_{z1} \left(\varepsilon_{xx} \sqrt{k_x^2 - k_0^2} \cos\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) - k_{z2} \sin\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) \right)}{k_0 \varepsilon_{xx} \left(k_{z1} \sin\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \cos\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) - k_{z2} \cos\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \sin\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) \right)},$$

$$A_2 = - \frac{k_{z2} \left(\varepsilon_{xx} \sqrt{k_x^2 - k_0^2} \cos\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) - k_{z1} \sin\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \right)}{k_0 \varepsilon_{xx} \left(k_{z1} \sin\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \cos\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) - k_{z2} \cos\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \sin\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) \right)},$$

$$B = \frac{\varepsilon_{xx} \sqrt{k_x^2 - k_0^2} \cos\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \cos\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) (k_{z1}a_1 - k_{z2}a_2)}{k_0 \varepsilon_{xx} \left(k_{z1} \sin\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \cos\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) - k_{z2} \cos\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \sin\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) \right)} -$$

$$\frac{k_{z1}k_{z2} \left(a_1 \cos\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \sin\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) - a_2 \sin\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \cos\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) \right)}{k_0 \varepsilon_{xx} \left(k_{z1} \sin\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \cos\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) - k_{z2} \cos\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \sin\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) \right)}.$$

k_x , k_{z1} и k_{z2} удовлетворяют системе уравнений:

$$2\varepsilon_{zz}k_{z1}^2 = k_0^2 \left(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{yz}^2 \right) - k_x^2 \left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz} \right) -$$

$$\sqrt{\left(k_x^2 \left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz} \right) - k_0^2 \left(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yz}^2 \right) \right)^2 + 4k_x^2 k_0^2 \varepsilon_{yz}^2 \varepsilon_{xx}}, \quad (46\text{а})$$

$$2\varepsilon_{zz}k_{z2}^2 = k_0^2(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{yz}^2) - k_x^2(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) + \sqrt{\left(k_x^2(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz}) - k_0^2(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yz}^2)\right)^2 + 4k_x^2k_0^2\varepsilon_{yz}^2\varepsilon_{xx}}, \quad (46б)$$

$$\begin{aligned} & a_1k_{z1}^2 \sin\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \left(\varepsilon_{xx}\sqrt{k_x^2 - k_0^2} \cos\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) - k_{z2} \sin\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) \right) - \\ & a_2k_{z2}^2 \sin\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) \left(\varepsilon_{xx}\sqrt{k_x^2 - k_0^2} \cos\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) - k_{z1} \sin\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \right) = \\ & \varepsilon_{xx}(k_x^2 - k_0^2) \cos\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \cos\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) (k_{z1}a_1 - k_{z2}a_2) - \\ & k_{z1}k_{z2}\sqrt{k_x^2 - k_0^2} \left(a_1 \cos\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \sin\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) - a_2 \sin\left(\frac{k_{z1}d}{2}\right) \cos\left(\frac{k_{z2}d}{2}\right) \right). \end{aligned} \quad (46в)$$

Величины k_{z1} и k_{z2} определяются уравнениями (46) с точностью до знака, поэтому без ограничений общности будем считать, что $k_{z1} > 0$ и $k_{z2} > 0$.

Соответствующие магнитные поля имеют вид:

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} A_1 \begin{pmatrix} -i\frac{k_{z1}}{k_0}a_1 \sin k_{z1}z \\ \frac{k_0\varepsilon_{xx}}{k_{z1}} \cos k_{z1}z \\ \frac{k_x}{k_0}a_1 \cos k_{z1}z \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} -i\frac{k_{z2}}{k_0}a_2 \sin k_{z2}z \\ \frac{k_0\varepsilon_{xx}}{k_{z2}} \cos k_{z2}z \\ \frac{k_x}{k_0}a_2 \cos k_{z2}z \end{pmatrix} \end{bmatrix} e^{i(k_x x - \omega t)} \text{ при } -d/2 < z < d/2, \quad (47а)$$

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} B \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{k_x^2 - k_0^2}}{k_0} \\ 0 \\ \frac{k_x}{k_0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} e^{\left(\frac{d}{2} - z\right)\sqrt{k_x^2 - k_0^2}} e^{i(k_x x - \omega t)} \quad \text{при } z > d/2, \quad (47б)$$

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} B \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{k_x^2 - k_0^2}}{k_0} \\ 0 \\ \frac{k_x}{k_0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} e^{\left(\frac{d}{2} + z\right)\sqrt{k_x^2 - k_0^2}} e^{i(k_x x - \omega t)} \quad \text{при } z < -d/2. \quad (47в)$$

Оставшаяся часть данного раздела посвящена нахождению и решению уравнений для коэффициентов $C_j(x)$.

Поля (43) в гофрированном волноводе удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\text{rot}\vec{E}(x, z) = ik_0\vec{H}(x, z), \quad \text{rot}\vec{H}(x, z) = -ik_0\hat{\varepsilon}(x, z)\vec{E}(x, z), \quad (48)$$

$$\text{где } \hat{\varepsilon}(x, z) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ 0 & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \text{ при } -d_0/2 < z < -d_0/2 + d(x),$$

$\hat{\varepsilon}(x, z) = 1$ при $z < -d_0/2$ и $z > -d_0/2 + d(x)$. В качестве d_0 выберем некоторую среднюю толщину волновода, например, $d_0 = \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda d(x) dx$, где Λ – период гофра.

Подстановка (43) в (48) дает

$$\sum_{\substack{j=-2 \\ j \neq 0}}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{dC_j}{dx} e_{jz} + C_j \frac{\partial e_{jz}}{\partial x} + ix C_j e_{jz} \frac{dk_{xj}(d(x))}{dx} \\ -\frac{dC_j}{dx} e_{jy} - C_j \frac{\partial e_{jy}}{\partial x} - ix C_j e_{jy} \frac{dk_{xj}(d(x))}{dx} \end{pmatrix} e^{ik_{xj}(d(x))x} = 0, \quad (49a)$$

$$\sum_{\substack{j=-2 \\ j \neq 0}}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{dC_j}{dx} h_{jz} + C_j \frac{\partial h_{jz}}{\partial x} + ix C_j h_{jz} \frac{dk_{xj}(d(x))}{dx} \\ -\frac{dC_j}{dx} h_{jy} - C_j \frac{\partial h_{jy}}{\partial x} - ix C_j h_{jy} \frac{dk_{xj}(d(x))}{dx} \end{pmatrix} e^{ik_{xj}(d(x))x} = 0. \quad (49б)$$

Уравнение (49а) скалярно умножим на $-\vec{H}_i^*(x, z)$, уравнение (49б) – на $\vec{E}_i^*(x, z)$, затем сложим их и проинтегрируем по $z \in (-\infty, +\infty)$, $i = -2, -1, 1, 2$. При этом воспользуемся соотношением ортогональности мод планарного волновода:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (e_{iy}^* h_{jz} - e_{iz}^* h_{jy} + e_{jy} h_{iz}^* - e_{jz} h_{iy}^*) dz = f_i(x) \delta_{ij}, \text{ где } \delta_{ij} \text{ – символ Кронекера.}$$

$f_i(x)$ периодически зависит от x с периодом гофра. В итоге получим уравнения для $C_j(x)$:

$$\frac{dC_i(x)}{dx} + ix \frac{dk_{xi}(d(x))}{dx} C_i(x) = \frac{1}{f_i(x)} \sum_{\substack{j=-2 \\ j \neq 0}}^2 S_{ij}(x) C_j(x) e^{i(k_{xj}(d(x)) - k_{xi}(d(x)))x}. \quad (50)$$

Здесь коэффициенты связи мод имеют вид

$$S_{ij}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e_{iz}^* \frac{\partial h_{jy}}{\partial x} - e_{iy}^* \frac{\partial h_{jz}}{\partial x} + h_{iy}^* \frac{\partial e_{jz}}{\partial x} - h_{iz}^* \frac{\partial e_{jy}}{\partial x} \right) dz. \quad (51)$$

Напомним, что все входящие в (51) поля зависят от x периодически с периодом гофра. После замены переменных

$$\tilde{C}_j(x) = C_j(x) e^{i(k_{xj}(d(x)) - k_{xj}(d_0))x},$$

$$\tilde{C}_i(x) = C_i(x) e^{i(k_{xi}(d(x)) - k_{xi}(d_0))x},$$

где $k_{xi}(d_0)$ — x -я составляющая волнового вектора i -й моды планарного волновода со средней толщиной d_0 .

Уравнения (50) преобразуются к виду:

$$\frac{d\tilde{C}_i(x)}{dx} + i(k_{xi}(d_0) - k_{xi}(d(x)))\tilde{C}_i(x) = \frac{1}{f_i(x)} \sum_{\substack{j=-2 \\ j \neq 0}}^2 S_{ij}(x) \tilde{C}_j(x) e^{i(k_{xj}(d_0) - k_{xi}(d_0))x}. \quad (52)$$

Функции $k_{xi}(d(x))$ и $\frac{S_{ij}(x)}{f_i(x)}$ являются периодическими с периодом гофра,

поэтому можно разложить их в ряд Фурье. В этом случае (52) перейдет в

$$\frac{d\tilde{C}_i(x)}{dx} + i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \theta_{in} e^{inGx} \tilde{C}_i(x) = \sum_{\substack{j=-2 \\ j \neq 0}}^2 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{S_{ij}}{f_i} \right)_p \tilde{C}_j(x) e^{i\Delta k_{ijp}x}, \quad (53)$$

$$\Delta k_{ijp} = k_{xj}(d_0) - k_{xi}(d_0) + pG,$$

где $G = \frac{2\pi}{\Lambda}$ – параметр обратной решетки, θ_{in} и $\left(\frac{S_{ij}}{f_i}\right)_p$ – коэффициенты Фурье

функций $(k_{xi}(d_0) - k_{xi}(d(x)))$ и $\frac{S_{ij}(x)}{f_i(x)}$ соответственно. Полученная система (53)

может быть значительно упрощена в предположении малой по сравнению с толщиной волновода амплитуды гофра и малой анизотропии материала волновода. В этом случае связь мод разных поляризаций и разных направлений распространения мала, малы в сравнении с k_x коэффициенты при $\tilde{C}(x)$ в (53) и, следовательно, функции $\tilde{C}(x)$ меняются слабо на расстояниях порядка длины волны в волноводе. Поэтому в системе уравнений (53) можно оставить только те слагаемые, у которых фаза множителей при $\tilde{C}(x)$ меняется медленно.

В первую очередь интересны характеристики вырожденных запрещенных зон. Ограничившись частотами в окрестности вырожденной ЗЗ, например, при выполнении условия

$$\Delta k_{1,-2,1} \approx 0, \quad (54)$$

сведем (53) к системе

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{C}_1(x)}{dx} &= -i\theta_{1,0}\tilde{C}_1(x) + \left(\frac{S_{1,-2}}{f_1}\right)_1 \tilde{C}_{-2}(x)e^{i\Delta k_{1,-2,1}x} \\ \frac{d\tilde{C}_{-2}(x)}{dx} &= -i\theta_{-2,0}\tilde{C}_{-2}(x) + \left(\frac{S_{-2,1}}{f_{-2}}\right)_{-1} \tilde{C}_1(x)e^{-i\Delta k_{1,-2,1}x} \end{aligned} \quad (55)$$

Условие (54) является аналогом условия (1) обменного брэгговского отражения.

Видно, что система (55) связывает амплитуды $\tilde{C}_1(x)$ и $\tilde{C}_{-2}(x)$ волн с противоположным направлением распространения (разные знаки индексов) и с разной поляризацией (разные модули индексов). Это отражает необходимую для формирования вырожденной ЗЗ гибридизацию волн противоположных направлений и разных поляризаций. Возможность «отбросить» в уравнениях системы (53) все слагаемые с быстро меняющейся фазой множителей при $\tilde{C}(x)$

обосновывает также то, что в разложениях (43) не были учтены излучательные моды.

Система (55) может быть сведена к линейной системе с постоянными коэффициентами с помощью замен

$$P_1(x) = \tilde{C}_1(x) e^{-\frac{i\Delta k_{1,-2,1}x}{2}},$$

$$P_{-2}(x) = \tilde{C}_{-2}(x) e^{\frac{i\Delta k_{1,-2,1}x}{2}}.$$

После замен из (55) получим

$$\begin{aligned} \frac{dP_1(x)}{dx} &= -i \left(\frac{\Delta k_{1,-2,1}}{2} + \theta_{1,0} \right) P_1(x) + \left(\frac{S_{1,-2}}{f_1} \right)_1 P_{-2}(x) \\ \frac{dP_{-2}(x)}{dx} &= \left(\frac{S_{-2,1}}{f_{-2}} \right)_{-1} P_1(x) + i \left(\frac{\Delta k_{1,-2,1}}{2} - \theta_{-2,0} \right) P_{-2}(x) \end{aligned} \quad (56)$$

В области частот, в которой собственные значения матрицы системы (56) обладают ненулевой действительной частью, наблюдается экспоненциальный рост или затухание модуля амплитуд $P_1(x)$ и $P_{-2}(x)$ и, следовательно, $C_1(x)$ и $C_{-2}(x)$, т.е. запрещенная зона.

Характеристики вырожденных запрещенных зон. С помощью полученных уравнений связанных мод (56) рассчитаны характеристики вырожденной запрещенной зоны волновода. Были приняты следующие параметры волновода:

тензор диэлектрической проницаемости материала волновода

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 8,0 & 0 & 0 \\ 0 & 8,0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 8,0 \end{pmatrix}, \quad \text{уравнение гофрированной поверхности волновода}$$

$z_{гран}^{верх} = d_0/2 + 0,2d_0 \cos(2,5x)$, притом что нижняя граница соответствует координате $z_{гран}^{ниж} = -d_0/2$. На рисунке 32 представлен график зависимости мнимой части блоховского волнового вектора (для обеих дисперсионных ветвей эти величины равны по модулю на частотах вырожденной 33) от частоты $k_0 d_0$ в окрестности вырожденной запрещенной зоны.

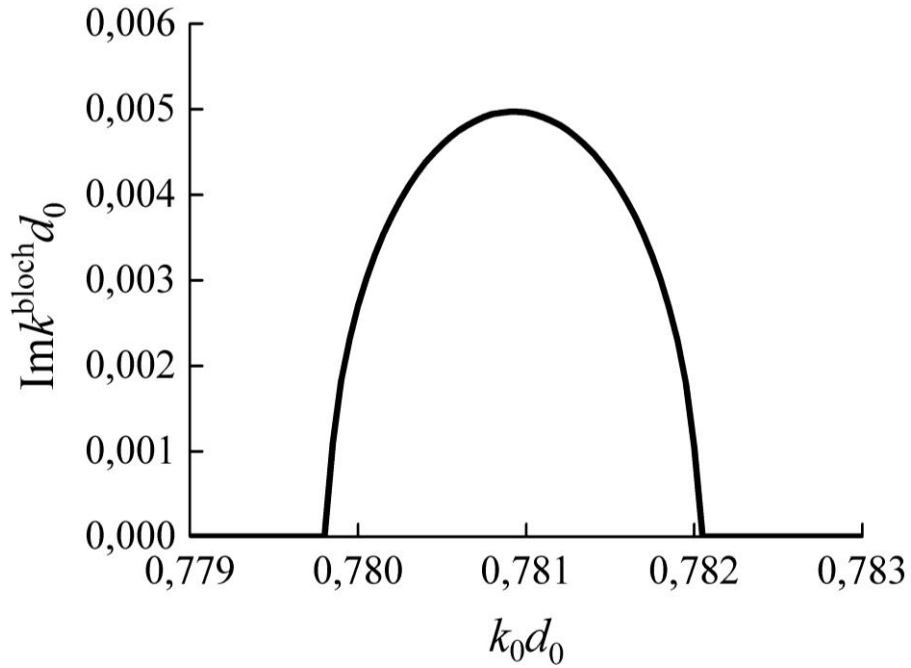


Рисунок 32 – Зависимость мнимой части блоховского волнового числа (обратного масштаба затухания волны по мере прохождения в волновод) от частоты в окрестности вырожденной запрещенной зоны.

Итак, из рисунка 32 видно, что в окрестности частоты $k_0 d_0 \approx 0,7809$ мнимая часть блоховского волнового вектора не равна нулю, т.е. имеется запрещенная зона, причем общая для обеих дисперсионных ветвей. Частота центра 33 удовлетворяет условию (54) брэгговского отражения. Действительно, для вышеприведенных параметров волновода $\Delta k_{1,-2,1} = 0$ на частоте $k_0 d_0 \approx 0,7824$.

Сдвиг между частотой центра вырожденной 33 и частотой, следующей из условия (54), стремится к нулю с уменьшением анизотропии материала и амплитуды гофра волновода.

Исходя из рисунка 32 можно заключить, что в центре запрещенной зоны волна затухает в e раз на длине в 80 периодов волновода. Преимуществом предложенной конструкции фильтра является простота изготовления в сравнении с аналогичными по физическому принципу действия многослойными фильтрами Шольца. Предложенный волноводный фильтр может быть использован в качестве управляемого затвора, интегрируемого в оптический волновод. Оценка времени установления решения в волноводе, на длине которого волна затухает в 10 раз

(200 периодов волновода), после изменения параметров материала под действием внешнего поля дает 10^{-11} с (время 10 проходов по волноводу волны с частотой зеленого света). Поэтому время переключения фильтра между режимами «прозрачности» и «непрозрачности» определяется временем изменения тензора диэлектрической проницаемости под действием электрооптического эффекта и имеет порядок 10^{-9} с.

Глава 3. Оптическое таммовское состояние

Введение

Основное отличие ФК от однородных материалов заключается в том, что однородные среды трансляционно инвариантны, в то время как ФК инвариантны лишь относительно дискретной группы трансляций. Благодаря этому в ФК может реализоваться отрицательное преломление, эффект суперпризмы [58-61], каналирование электромагнитных волн [62] и др. Большую роль в изучении свойств ФК играет тесная аналогия электродинамики ФК с квантовой механикой обычных электронных кристаллов, что позволило быстро создать адекватный аппарат для описания явлений, заимствовав его из физики твердого тела. При этом отсутствие в линейной электродинамике взаимодействия между фотонами позволяет в чистом виде изучать интерференционные и дифракционные явления: локализацию Андерсона [63], осцилляции Бэрри [64-67] и др. Особый интерес представляют поверхностные состояния, в частности, заимствованные из физики твердого тела, таммовские поверхностные состояния, которым посвящена эта глава. Важно отметить, что векторный характер полей в электродинамике делает задачу гораздо богаче квантово-механической. Особенно наглядно это различие становится при рассмотрении ФК, состоящих из анизотропных материалов.

Таммовские состояния

Необходимо отметить, что уравнение для электрического поля является точным аналогом одноэлектронного уравнения Шредингера для полубесконечного кристалла, решением которого является таммовское поверхностное состояние⁶ [11, 15, 70-76]. Действительно, уравнения Максвелла сводятся в этом случае к уравнению Гельмгольца

⁶ В 1932 году И. Е. Таммом [68] было предсказано новое квантовое явление – локализация электрона вблизи поверхности кристалла. Роль отрицательной диэлектрической проницаемости играл внешний потенциал, превосходящий энергию таммовского состояния (см. [69] и прочие).

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y + k_0^2 \varepsilon E_y = 0$$

а граничные условия требуют непрерывности E_y и H_x . Учитывая, что $H_x \sim \partial E_y / \partial z$, получаем полное соответствие квантово-механической задаче: $\partial^2 \psi / \partial z^2 + [2m(E - U) / \hbar^2] \psi = 0$, где ψ и $\partial \psi / \partial z$ непрерывны на границе.

Экспериментально таммовское состояние можно обнаружить, измеряя коэффициент прохождения волн через слой фотонного кристалла конечной толщины, сопряженный со слоем вещества с $\varepsilon < 0$. На частоте, соответствующей таммовскому состоянию, наблюдается узкий пик коэффициента прохождения (см. рисунок 33), связанный с туннелированием света через таммовское состояние [11, 15, 70-76]. Действительно, коэффициенты прохождения через один только однородный слой и через один только ФК (который работает в запрещенной зоне) оказываются много меньше, чем через сопряженную систему (см. рисунок 33), так как свет в среднем экспоненциально затухает, проходя по ФК или по материалу с отрицательной диэлектрической проницаемостью.

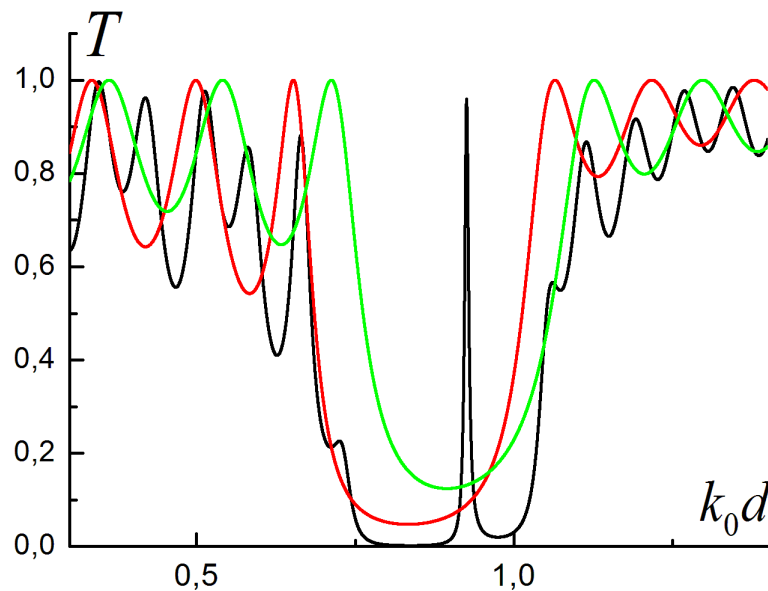


Рисунок 33 – Коэффициент прохождения через два совмещенных ФК (черная кривая) и через каждый из ФК по отдельности (зеленая и красная).

Напомним, что ФК может выступать и как материал с отрицательной диэлектрической проницаемостью, и как материал с отрицательной магнитной

проницаемостью. Следствием этого является возможность существования поверхностных состояний на границе двух разных ФК [11, 17, 70 – 76]. Естественным, что такое состояние лежит в частотном диапазоне, соответствующем пересечению запрещенных зон этих ФК. Такое состояние вызывает особый интерес, потому что оно не требует наличия сред с отрицательными ε или μ . При этом речь идет о решении, имеющем нулевое тангенциальное волновое число. То есть имеется поверхностное состояние, которое можно наблюдать при падении волны по нормали к слоям.

Уравнение, определяющее параметры такого состояния, соответствует равенству поверхностных импедансов волн в двух кристаллах. Оба блоховских волновых числа должны быть комплексными, и волны должны убывать в направлениях от границы.

В системе двух сопряженных фотонных кристаллов наличие таммовского состояния можно экспериментально обнаружить по пику коэффициента прохождения через образец, состоящий из конечных кусков ФК, на частотах перекрытия запрещенных зон кристаллов (см. рисунок 33).

Для экспериментального наблюдения оптического таммовского поверхностного состояния были созданы два образца ФК. Образец первого ФК состоял из пяти двухслойных элементарных ячеек, каждая из которых состояла из слоя SiO_2 толщиной 138 нм и слоя Ta_2O_5 толщиной 93.6 нм. Элементарная ячейка второго ФК содержала магнитооптический слой из висмут-замещенного железиттриевого граната ($Bi:YIG$) толщиной 87 нм и слоя SiO_2 толщиной 138 нм (см. рисунок 34). В эксперименте измерялся коэффициент прохождения и угол фарадеевского вращения плоскости поляризации прошедшей волны.

Наблюдаемый в эксперименте характерный пик прохождения совпадает с предсказаниями теории, связывающей этот пик с существованием поверхностного таммовского состояния. В области резонансного прохождения наблюдается усиление эффекта Фарадея, что также хорошо согласуется с расчетами.

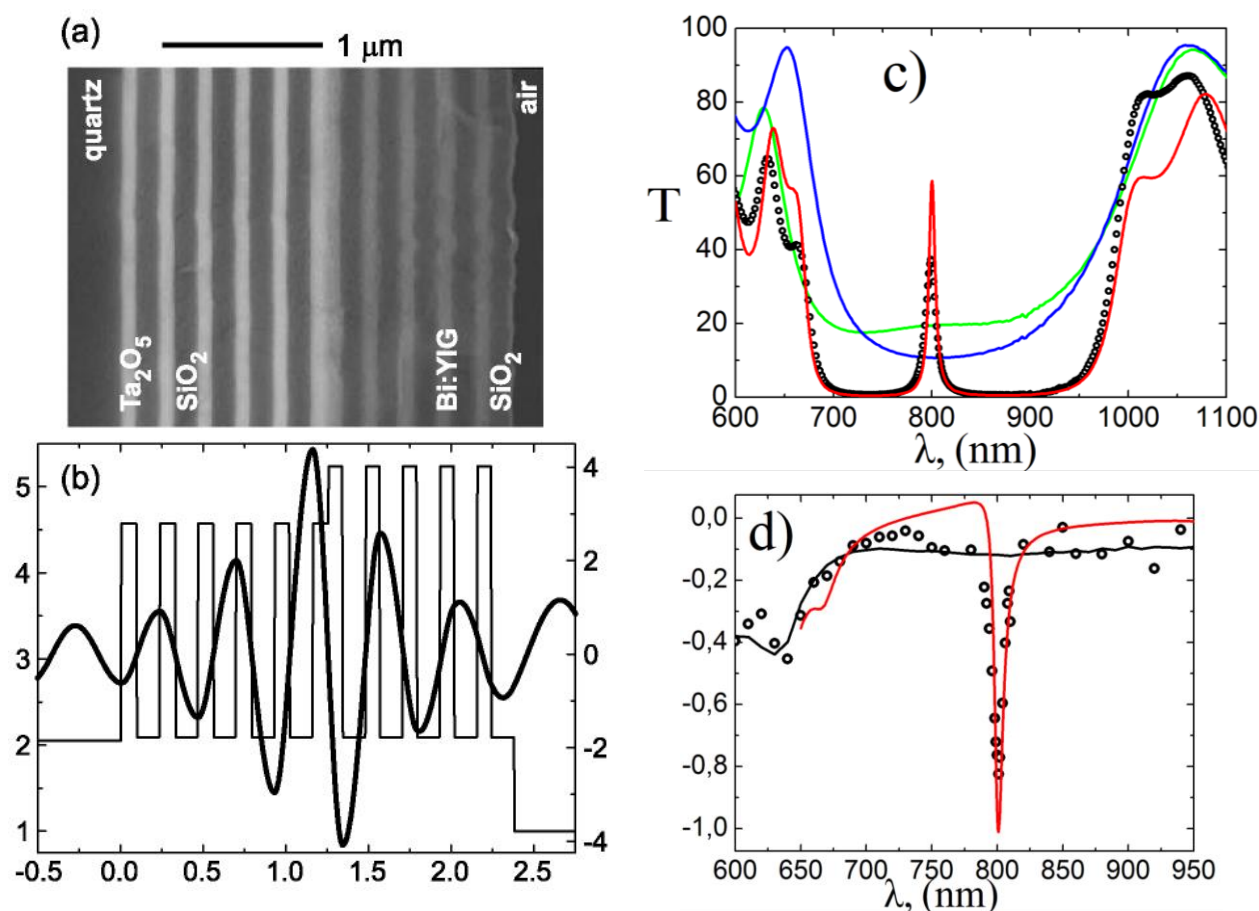


Рисунок 34 – а) исследуемая структура, б) расчетное распределение поля, в) зависимость коэффициента прохождения от длины волны для: д) зависимость угла фарадеевского вращения от длины волны.

Также был проведен эксперимент по наблюдению оптического таммовского состояния на границе фотонного кристалла и слоя золота, которое в оптических частотах имеет отрицательное значение диэлектрической проницаемости (см. рисунок 35).

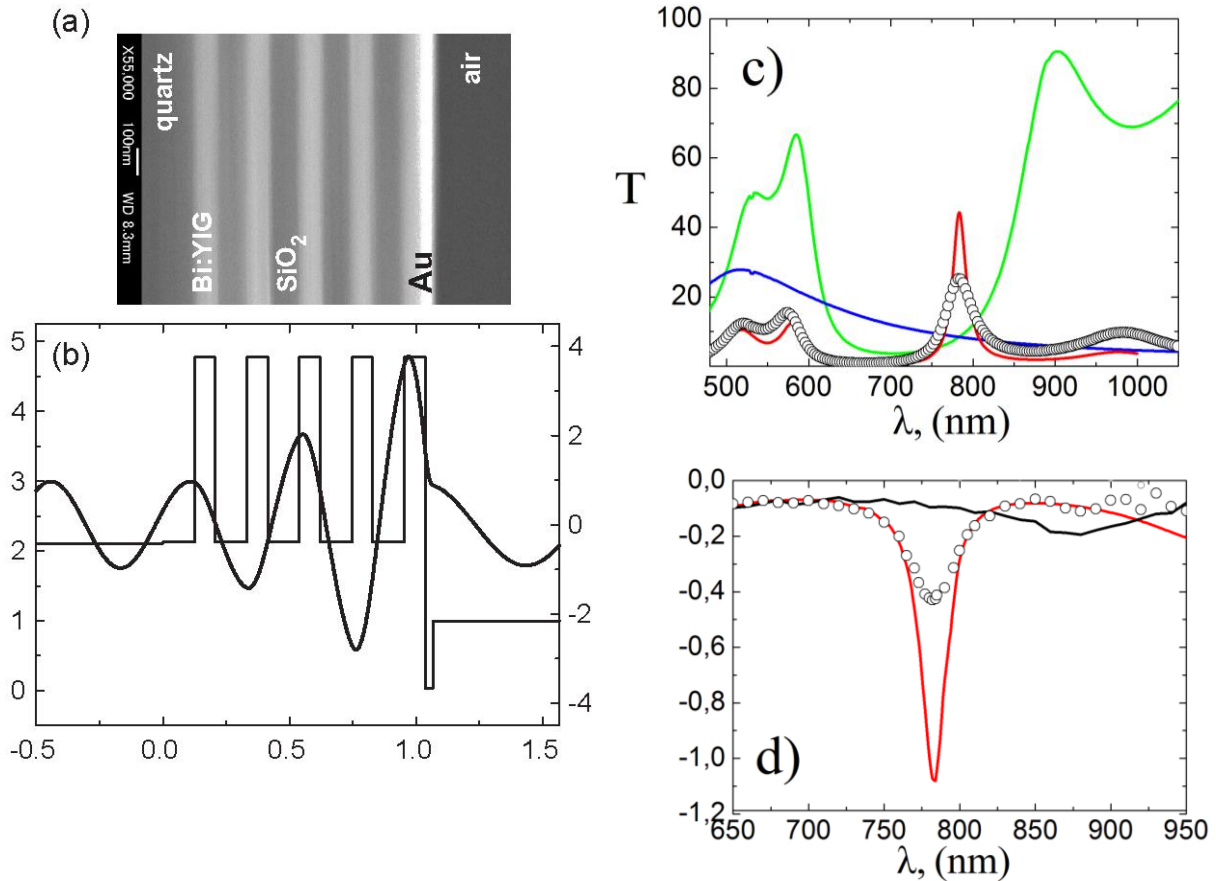


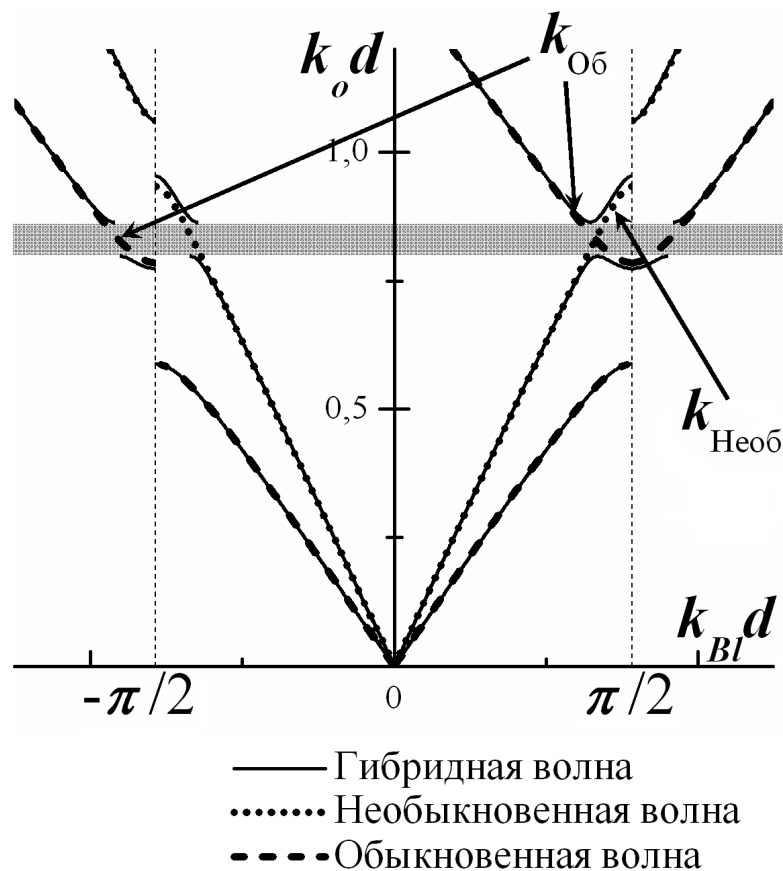
Рисунок 35 – а) исследуемая структура, б) расчетное распределение поля, в) зависимость коэффициента прохождения от длины волны для: д) зависимость угла фарадеевского вращения от длины волны.

Случай анизотропных фотонных кристаллов.

В отличие от шредингеровской квантовой механики, в которой поведение электрона описывается скалярной пси-функцией, в электродинамике поля описываются не скаляром, а несколькими векторами, что проявляется, например, в отсутствии s-рассеяния в оптике. Направление этих векторов (поляризация) может качественно влиять на распространение электромагнитных волн. В случае нормального падения электромагнитных волн на слоистую структуру, изготовленную из изотропных материалов, все состояния двукратно вырождены: обе поляризации имеют одинаковые волновые векторы, и задача, как указано выше, сводится к скалярной. Если же материал одного из слоев элементарной ячейки является анизотропным, для простоты одноосным кристаллом, и ось

анизотропии параллельна слою, то вырождение снимается, и существуют две блоховские волны: обыкновенная и необыкновенная. Каждая из этих блоховских волн является решением соответствующей независимой подсистемы уравнений Максвелла. Важно, что и граничные условия также разделяются. Вследствие независимости подсистем и граничных условий возможное пересечение дисперсионных кривых этих блоховских волн не ведет к их взаимодействию⁷ и гибридизации этих волн, а также к расщеплению дисперсионных кривых в точке пересечения (см. рисунок 36).

Снятие вырождения не ведет к качественному изменению зонной структуры. Для каждой поляризации наблюдается чередование разрешенных и запрещенных зон, причем запрещенные зоны располагаются на границах зон Бриллюэна. Запрещенные зоны, соответствующие различным поляризациям блоховских волн, не совпадают, хотя могут и пересекаться.



⁷ Рассматриваются линейные уравнения, и никакого «взаимодействия» в терминах нелинейной физики конечно же быть не может. Взаимодействие, «каплинг» (coupling) в терминах теории связанных мод, наступает, когда возникает связь первоначально независимых подсистем. Этот подход и терминология были развиты в пионерской работе Zengerle R *J. Mod. Opt.* **34** 1589 (1987).

Рисунок 36 – Дисперсионные кривые обыкновенных (штриховые линии) и необыкновенных (пунктирные линии) блоховских волн в ФК из изотропных и анизотропных слоев и результат гибридизации (сплошные кривые) при появлении гиротропных свойств у изотропных слоев. Период ФК состоит из одноосного кристалла с проницаемостями в направлении главных осей $\varepsilon_{xx} = 2.0$, $\varepsilon_{yy} = 8.0$ и магнитооптического слоя с проницаемостью $\varepsilon_{diag} = 3.0$, $\varepsilon_{off_diag} = i\alpha = 0.5i$. Для наглядности дисперсионной кривой материалы параметры (например, гиротропия) были искусственно завышены.

Ситуация принципиально меняется, если один из слоев является гиротропным. Для наглядности рассмотрим намагничивание ФК в направлении, перпендикулярном слоям. Предположим, что элементарная ячейка этого ФК состоит из изотропного магнитооптического слоя и анизотропного слоя (ось анизотропии направлена параллельно слоям) (см. рисунок 37). До намагничивания магнитооптический слой являлся изотропным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_d , а после намагничивания становится гиротропным, и его диэлектрическая проницаемость становится тензором вида:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_d & -\varepsilon_{off} & 0 \\ \varepsilon_{off} & \varepsilon_d & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_d \end{pmatrix}.$$

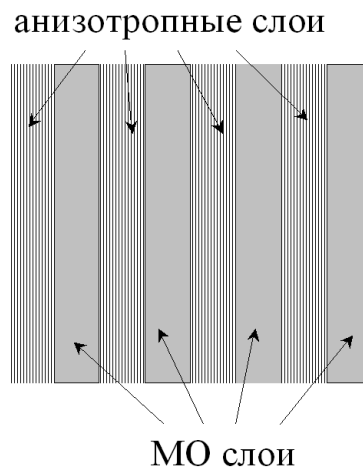


Рисунок 37 – Геометрия ФК.

До намагничивания по ФК в направлении, перпендикулярном слоям, могли распространяться две блоховские волны: обыкновенная (линейно поляризованная в направлении, перпендикулярном оси анизотропии) и необыкновенная (линейно поляризованная вдоль оси анизотропии). После намагничивания обыкновенная и необыкновенная волны уже не являются собственными решениями во всех слоях ФК, так как они не являются собственными решениями в гиротропном слое. Собственными решениями в этих слоях являются циркулярно поляризованные волны [35]. Очевидно, что на поверхностях слоев граничные условия будут смешивать циркулярно поляризованные волны в магнитооптическом слое с линейно поляризованными в анизотропном слое⁸. Смешивание различных решений на границе слоев приводит к тому, что дисперсионные кривые перезаываются в точке пересечения дисперсионных кривых обыкновенной и необыкновенной волн соответствующего ненамагниченного кристалла (см. рисунок 36).

Как отмечалось ранее, при этом образуется запрещенная зона, причем она может лежать не на границе, а внутри зоны Бриллюэна [25]. Аналогичная запрещенная зона наблюдается в периодическом фильтре Шольца. Он представляет собой ФК, период которого состоит из двух различных анизотропных одноосных материалов, оси которых параллельны слоям, но расположены под углом друг к другу [6]. Важно отметить, что эта запрещенная зона образуется одновременно для всех решений⁹, в то время как положение запрещенных зон, формирующихся на бриллюэновской границе, может зависеть от выбора поляризации решения (см. рисунок 36). Иными словами, образование дополнительных зон вырождено по поляризации [25], будем называть такие зоны вырожденными. Важно отметить, что истинное вырождение – равенство волновых векторов (приведенных в первую зону Бриллюэна) – для разных волн достигается только на границе вырожденной запрещенной зоны, а для частот

⁸ Заметим, что в отличие от изотропного случая ни циркулярно, ни эллиптически поляризованные волны не могут распространяться по анизотропному кристаллу.

⁹ Мы не разделяем здесь решения по поляризации, так как невозможно определить однозначно понятие поляризации для гибридной блоховской волны см. [18]

внутри этой зоны блоховский вектор для четырех решений (два направлены вперед, два – назад) имеет специальный вид $k_{1,2}(k_0) = \pm(a(k_0) + ib(k_0))$ и $k_{3,4}(k_0) = \pm(a(k_0) - ib(k_0))$ [25].

Формирование при намагничивании вырожденной запрещенной зоны позволяет управлять появлением таммовского состояния.

Рассмотрим систему, состоящую из двух пластин одномерных фотонных кристаллов (см. рисунок 38). Период первого ФК состоит из анизотропного и магнитооптического слоев. Период второго ФК состоит из двух изотропных слоев.

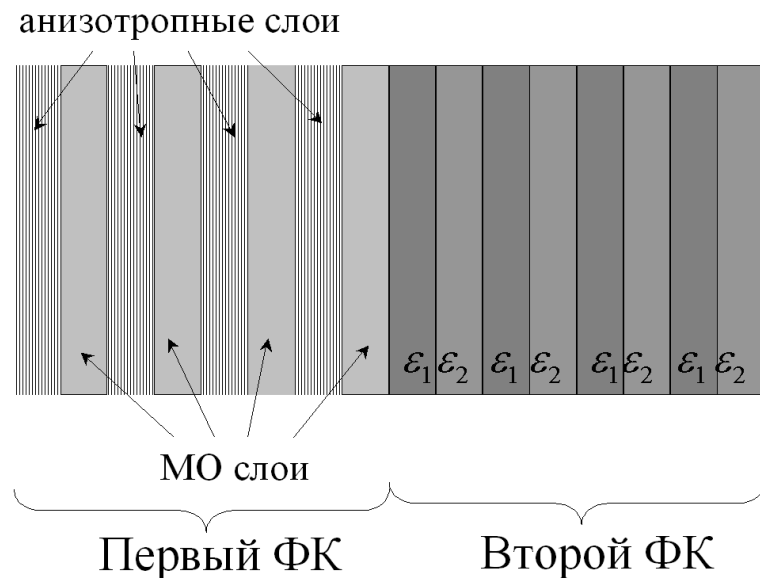


Рисунок 38 – Система двух ФК. Период первого ФК состоит из одноосного кристалла с проницаемостями в направлении главных осей $\varepsilon_{xx} = 2.7$, $\varepsilon_{yy} = 5.0$ и магнитооптического слоя с проницаемостями $\varepsilon_{diag} = 3.0$, $\varepsilon_{off_diag} = i\alpha = 0.02i$. Значения проницаемостей слоев второго ФК равны $\varepsilon_1 = 3.1$, $\varepsilon_2 = 3.4$. Все слои одинаковой толщины 100 нм.

Рассмотрим частоты вблизи пересечения дисперсионных кривых первого ФК. Предполагается, что точка пересечения лежит в разрешенной зоне при отсутствии намагниченности, а второй ФК имеет на этой частоте запрещенную зону. До включения магнитного поля прохождение через рассматриваемую систему подавлено благодаря запрещенной зоне второго ФК (см. рисунок 39).

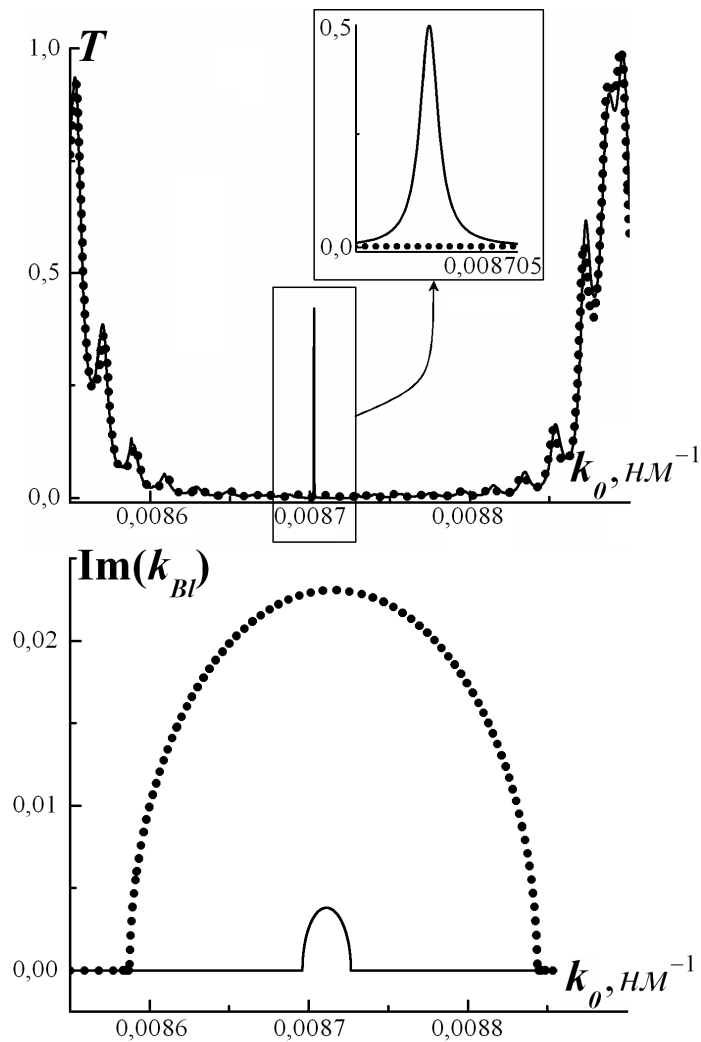


Рисунок 39 – Верхний рисунок: коэффициент прохождения через систему двух ФК (см. рисунок 38) при отсутствии (пунктир) и при наличии (сплошная линия) намагниченности. Нижний рисунок: мнимая часть блоховского волнового числа обычного (пунктир) и магнитооптического (сплошная линия) ФК при наличии намагниченности.

Включение магнитного поля приводит к появлению запрещенной зоны в первом ФК [25] (см. сплошную линию на нижнем графике на рисунке 39) и, как следствие, к формированию таммовского состояния на границе между двумя ФК. Это таммовское состояние проявляется в спектре прозрачности как острый пик (см. рисунок 39).

Отметим, что в отличие от рассмотренного в предыдущих разделах таммовского состояния в магнитофотонных кристаллах из изотропных

компонентов, в данном случае при включении магнитного поля таммовское состояние не расщепляется на два состояния с разными частотами, а просто возникает. При этом это и не двукратно вырожденное по поляризации состояние, как мы наблюдали в ФК из изотропных компонентов (в МФК без намагничивания), то есть имеется одно таммовское состояние, которое не расщепляется в магнитном поле. Такая особенность связана с гибридизацией решений в неоднородных магнитных материалах, содержащих анизотропные компоненты.

Фундаментальная разница между гибридными и негибридными решениями заключается в том, что в случае, когда гибридизации нет, решения можно разделить по поляризациям (на право-, лево-циркулярно поляризованные, ТЕ и ТМ моды и т.д.), и тем самым свести векторную задачу к двум независимым скалярным задачам. При этом каждое собственное решение обладает своим скалярным импедансом. То же относится и к случаю изотропно-гиротропных ФК, и к случаю однородных сред. В этих случаях для сшивки собственных решений в различных средах достаточно равенства входных скалярных адмитансов соответствующих мод. В случае анизотропно-гиротропного ФК в результате смешивания гибридная блоховская волна в каждом слое состоит из четырех волн (имеющих различные поляризации и распространяющиеся в противоположных направлениях). Отличительным свойством этой блоховской волны является то, что она обладает анизотропным собственным адмитансом.

Рассмотрим структуру гибридного решения в анизотропном слое. В общем случае решение в анизотропном слое можно записать в виде

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_o z} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_o z} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_e z} + D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ik_e z},$$

где A, B, C, D – амплитуды соответствующих четырех плоских волн, являющихся решениями уравнений Максвелла в рассматриваемом слое, k_o – волновой вектор обыкновенной волны, k_e – волновой вектор необыкновенной волны. На границе анизотропно-гиротропного ФК и ФК из изотропных компонентов необходимо

сшить тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей, то есть четыре компоненты E_x, E_y, H_x, H_y . Отметим, что в случае, когда нужно решить не задачу рассеяния с фиксированной амплитудой падающей волны, а задачу на собственные решения, достаточно сшить не абсолютные значения полей, а лишь их отношения $Y_x = H_x / E_y$ и $Y_y = -H_y / E_x$ (в квантовой механике это соответствует сшивке логарифмической производной). Величины Y имеют смысл входного адмитанса. Для любой изотропной среды адмитанс изотропен, то есть $Y_x = H_x / E_y = \frac{k}{k_0} = -H_y / E_x = Y_y$, что прямо следует из уравнения $\text{rot}(\vec{E}) = \frac{1}{c} \frac{d\vec{H}}{dt}$.

Для одной гибридной волны равенство адмитансов не выполнено, так как в анизотропном слое

$$Y_x = H_x / E_y = \frac{k_1}{k_0} \neq \frac{k_2}{k_0} = -H_y / E_x = Y_y.$$

Следовательно, только одно собственное решение для анизотропно-гиротропного ФК не может быть сшито с решением для ФК из изотропных компонентов, и необходимо искать решение для анизотропно-гиротропного ФК в виде суммы двух затухающих мод (с разными волновыми векторами) $k_1(k_0) = a(k_0) + ib(k_0)$ и $k_4(k_0) = -a(k_0) + ib(k_0)$.

$$\vec{E} = A \begin{pmatrix} f_{1x}(z) \\ f_{1y}(z) \end{pmatrix} e^{ik_1 z} + B \begin{pmatrix} f_{2x}(z) \\ f_{2y}(z) \end{pmatrix} e^{ik_2 z},$$

соответственно, магнитное поле

$$\vec{H} = A \begin{pmatrix} Y_{1y} f_{1y}(z) \\ -Y_{1x} f_{1x}(z) \end{pmatrix} e^{ik_1 z} + B \begin{pmatrix} Y_{2y} f_{2y}(z) \\ -Y_{2x} f_{2x}(z) \end{pmatrix} e^{ik_2 z},$$

где

$$Y_{\alpha\beta} = n_\alpha + \frac{f'_{\alpha\beta}}{f_{\alpha\beta} i k_0}$$

$\alpha = 1, 2$ – номер решения, $\beta = x, y$ – соответствующая компонента.

Приравнивая на границе ФК (которая принята за начало координат) соответствующие компоненты полей в анизотропном МФК полям в ФК на изотропных компонентах

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af(z) \\ bf(z) \end{pmatrix} e^{ikz} \text{ и } \vec{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \left(n + \frac{f'}{f k_0} \right) f \\ -a \left(n + \frac{f'}{f k_0} \right) f \end{pmatrix} e^{ikz},$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} A \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af \\ bf \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} Y_{1y} f_{1y} \\ -Y_{1x} f_{1x} \end{pmatrix} e^{ik_1 z} + B \begin{pmatrix} Y_{2y} f_{2y} \\ -Y_{2x} f_{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bYf \\ -aYf \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Выразив $af(z)$ и $bf(z)$ из первого уравнение и подставив во второе, получим

$$\begin{cases} A(Y_{1y} - Y) f_{1y} + B(Y_{2y} - Y) f_{2y} = 0 \\ A(Y_{1x} - Y) f_{1x} + B(Y_{2x} - Y) f_{2x} = 0 \end{cases}$$

Это уравнение имеет нетривиальное решение только когда соответствующий детерминант равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (Y_{1y} - Y) f_{1y} & (Y_{2y} - Y) f_{2y} \\ (Y_{1x} - Y) f_{1x} & (Y_{2x} - Y) f_{2x} \end{vmatrix} = 0.$$

Именно это уравнение, в отличие от привычного равенства импедансов, и будет определять положение таммовского резонанса.

В качестве заключения к данному разделу можно отметить, что существование поверхностных состояний в ФК является примером наблюдаемых в ФК явлений, которые не могут быть объяснены в пренебрежении неоднородности блоховской функции световой волны на масштабах элементарной ячейки. Механизмом, определяющим возникновение поверхностного состояния, является в среднем экспоненциальное затухание блоховской волны по мере продвижения в глубь ФК. Входной импеданс внутри

запрещенной зоны меняется, позволяя «сшить» решение не только для материалов, обладающих отрицательной диэлектрической (или магнитной) проницаемостью, но и для других ФК.

Таммовское состояние в СВЧ области

В предыдущем разделе было показано, что на границе ФК и МФК существует поверхностное состояние. Свойства таких систем зависят от внешнего магнитного поля, и, казалось бы, этим полем можно контролировать не только поляризацию, но и частоту поверхностного состояния. Однако, к сожалению, в оптических частотах влияние магнитного поля на магнитную и диэлектрическую проницаемости крайне мало. К примеру, недиагональный элемент тензора диэлектрической проницаемости магнитооптических веществ в поле насыщения не превышает сотых долей процента¹⁰ от диагонального элемента, а изменение в поле диагонального элемента еще меньше, по крайней мере, на порядок. Столь малое изменение проницаемости делает на практике крайне затруднительным контролирование частоты таммовского состояния с помощью магнитного поля. В микроволновой области, благодаря ферро- и ферритмагнитному резонансу, намагничивание образца приводит к изменению тензора магнитной проницаемости, причем относительное изменение проницаемости может быть более 100% [77].

В данном разделе исследуется туннелирование СВЧ излучения через таммовское поверхностное состояние (ТС), возникающее на границе двух многослойных периодических систем, каждая из которых состоит из конечного числа периодов, и поэтому может рассматриваться как ограниченный ФК. Следует отметить, что зонная структура, блоховский волновой вектор и фактор Ляпунова определяются исключительно строением элементарной ячейки и не зависят от числа ячеек в образце. Решение внутри образца одномерного ФК

¹⁰ Вблизи резонанса возможны существенно большие значения недиагональной компоненты, вплоть до 0.3, однако большое поглощение делает эти частоты непригодными для практического применения.

является суперпозицией двух блоховских волн независимо от числа ячеек. Поэтому ниже без ограничения общности будем рассматривать ограниченные образцы, содержащие даже малое число периодов, как ФК.

Рассмотрим прохождение электромагнитной волны через образец, состоящий из двух ФК. Первый ФК состоит из слоев феррита и вакуума, и поэтому является МФК, второй ФК состоит из слоев полистирола и вакуума. Исследуем зависимость положения таммовского пика прозрачности от приложенного намагничивающего поля. Намагничивающее поле H_{ex} прикладывается вдоль поверхности слоев. Поляризация падающего излучения линейная, при этом электрическое поле падающей волны параллельно намагничивающему полю.

Таммовское состояние в магнитофотонных кристаллах. Как было отмечено ранее, ТС может образовываться на границе двух ФК. Частота этого состояния лежит одновременно в запрещенных зонах обоих ФК, поэтому электромагнитное поле экспоненциально (с точностью до периодического предэкспоненциального блоховского множителя) убывает при удалении от границы раздела. Таким образом, данное решение является локализованным вблизи границы двух ФК. Существование такого решения оказывается возможным благодаря периодическому предэкспоненциальному блоховскому множителю¹¹.

Идеальное ТС образуется в бесконечной системе – на границе двух полубесконечных ФК. В конечных системах, которые рассматриваются в реальном эксперименте, ТС приводит к резонансному туннелированию СВЧ излучения через систему и проявляется как пик прозрачности в спектре пропускания на частоте ТС.

Частота ТС определяется равенством входных импедансов двух ФК [15]

¹¹ В отсутствие этого множителя нельзя было бы одновременно удовлетворить граничные условия непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей. Так, в частности на границе двух слоев с отрицательной диэлектрической проницаемостью (внутри которых зависимость электромагнитного поля от координат имеет чисто экспоненциальный вид) не образуется никаких решений.

$$Z_1(f) = Z_2(f). \quad (57)$$

Заметим, что эти величины целиком определяются строением элементарной ячейки ФК, но отличаются от среднего по ячейке характеристического импеданса. Кроме того, необходимо отметить, что входной импеданс зависит от направления, поэтому необходимо различать «левый» и «правый» входной импеданс. Из условия (57) можно найти частоту ТС f_T .

Поскольку тензор магнитной проницаемости феррита

$$\mu = \begin{vmatrix} \mu_1(H_{ex}) & i\chi(H_{ex}) & 0 \\ -i\chi(H_{ex}) & \mu_1(H_{ex}) & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2(H_{ex}) \end{vmatrix}$$

зависит от величины намагничивающего поля H_{ex} , то входной импеданс магнитофотонного кристалла (состоящего из феррита и вакуума), зависящий от величины магнитной проницаемости, также является функцией внешнего магнитного поля H_{ex} . Таким образом, меняя намагничивающее поле H_{ex} , можно менять частоту ТС f_T .

К сожалению, чисто теоретическое изучение зависимости $f_T(H_{ex})$ затруднено необходимостью установления функциональной зависимости μ_1 , μ_2 и χ от намагничивающего поля H_{ex} . Для реальных веществ вид этих функций $\mu_1(H_{ex})$, $\mu_2(H_{ex})$ и $\chi(H_{ex})$ далек от модельных теоретических зависимостей [77] и существенно зависит от технологии изготовления феррита. Именно поэтому экспериментальное исследование $f_T(H_{ex})$ приобретает особую ценность.

Экспериментальное наблюдение таммовского состояния. В группе профессора Тарапова (в Харьковском институте радиофизики и электроники Национальной Академии Наук Украины) были изготовлены соответствующие фотонные кристаллы. Экспериментально исследовалась структура, образованная двумя совмещенными одномерными ФК (см. рисунок 40). Первый ФК образован двумя периодами, состоящими из слоя феррита толщиной $d_F = 1.00 \pm 0.03$ мм и слоя

воздуха толщиной $d_{s1} = 1.00 \pm 0.03$ мм. Второй ФК образован 5 периодами, состоящими из слоя полистирола толщиной $d_p = 1.59 \pm 0.03$ мм и слоя воздуха толщиной $d_{s2} = 2.00 \pm 0.03$ мм. Ферритовые и полистирольные слои представляют собой диски диаметром $D = 30$ мм и толщиной d_F и d_p соответственно. Воздушные слои образованы кольцами из полистирола с внешним диаметром D и толщинами d_{s1} и d_{s2} .

Использовался поликристаллический никелевый феррит $\text{NiO Fe}_2\text{O}_3$ марки 1СЧ4 с намагниченностью насыщения $M_s = 4800$ Гс, диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 11.0$ и тангенсом диэлектрических потерь $\tan \Delta_\varepsilon = 8.1 \cdot 10^{-4}$. Диэлектрическая проницаемость полистирола составляет $\varepsilon = 2.42$; тангенс диэлектрических потерь полистирола $\tan \Delta_\varepsilon = 3.0 \cdot 10^{-3}$.

Исследуемая структура, собранная из дисков и колец, помещается внутрь измерительной ячейки, представляющей собой эбонитовый полый цилиндр, поглощающий излучение, распространяющееся в поперечных направлениях (что исключает возбуждение волноводных мод). Внутри ячейки структура фиксируется эбонитовым кольцом. Измерительная ячейка жестко фиксируется в зазоре электромагнита для исключения смещения магнитных слоев под воздействием магнитного поля. В качестве генератора и детектора излучения использовался векторный анализатор спектра Agilent N5230A. Волноведущий тракт образован полыми металлическими прямоугольными волноводами сечением 7,2х3,4 мм с рупорами на концах приемного и излучающего волноводов.

Постоянное магнитное поле создавалось с помощью электромагнита. Измерительная ячейка с исследуемой структурой помещалась между рупорами в зазоре электромагнита. Волна падала по нормали к плоскостям слоев структуры. Вектор постоянного магнитного поля ориентирован перпендикулярно волновому вектору и вектору магнитной компоненты волны. При такой конфигурации полей в феррите распространяется так называемая необыкновенная волна. Между рупорами и исследуемой структурой также расположены фторопластовые линзы,

служащие для преобразования сферического фронта волны в плоский. Измерялся коэффициент пропускания в диапазоне частот 23-40 ГГц. Постоянное магнитное поле варьировалось в диапазоне 0-4500 Э. Погрешность измерения магнитного поля не превышает 5%. Неоднородность внешнего магнитного поля в объеме магнитных слоев исследуемой структуры не превышает 1% и не оказывает значительного влияния на наблюдаемые эффекты. Перед началом измерений проводилась калибровка частотной неравномерности при отсутствии измерительной ячейки с исследуемой структурой. Мощность излучаемого сигнала составляла минус 2 дБ относительно 1 мВт.

Для начала рассмотрим немагнитную систему двух ФК (остаточная намагнитченность порядка 50 Э), представленную на рисунке 40.

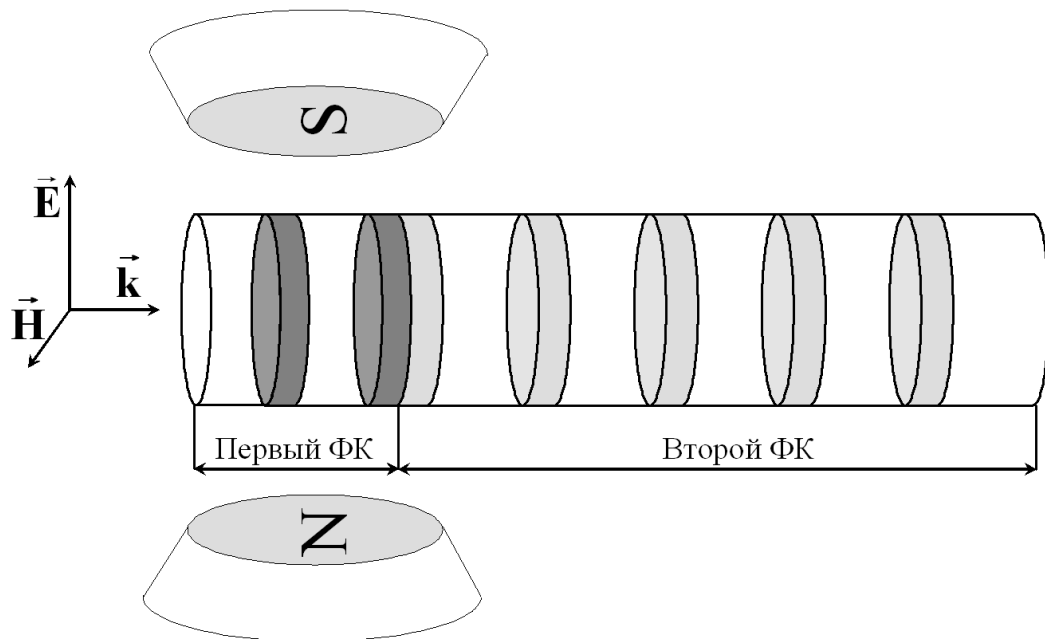


Рисунок 40 – Схема эксперимента.

В частотной зависимости коэффициента прохождения $T(f)$ (см. рисунок 41, кривая 1) вблизи 31 ГГц наблюдается пик прозрачности. Для того чтобы показать, что это таммовский резонанс (а не, скажем, Фабри-Перо резонанс), толщина каждого из ФК, участвующих в образовании ТС, была увеличена на один период.

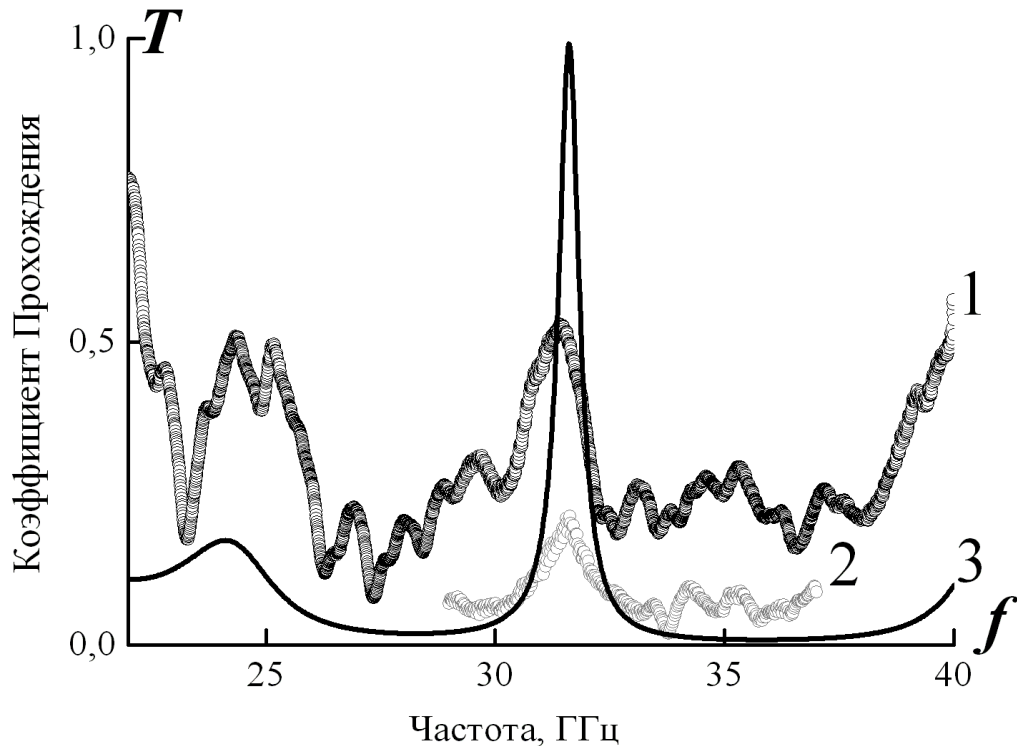


Рисунок 41 – Частотная зависимость коэффициента прохождения $T(f)$ через системы ненамагниченного МФК и ФК из полистирола и вакуума.

Иными словами, с обеих сторон к исследуемой системе (см. рисунок 40) было добавлено по соответствующему периоду (слева добавлен период воздух/феррит и справа добавлен период полистирол/воздух). В частотной зависимости (см. рисунок 41, кривая 2) коэффициента прохождения $T(f)$ этой дополнительной системы (3 периода воздух/феррит и 6 периодов полистирол/воздух) вблизи 31 ГГц, так же как и в частотной зависимости исследуемой системы, наблюдается пик прозрачности. Видно, что при добавлении периодов частота резонанса не поменялась, а, следовательно, резонанс не связан с толщиной ФК, образующих исследуемую систему, как в случае Фабри-Перо резонанса.

Теоретический расчет был выполнен в пренебрежении остаточной намагниченностью методом Т-матриц и показал, что на частоте 31 ГГц наблюдается таммовское состояние и связанный с ним пик прозрачности исследуемой системы (см. рисунок 41, кривая 3). Таким образом, наблюдаемый пик прозрачности связан с образованием ТС на границе между ФК и МФК.

Отличие между расчетным и экспериментальными коэффициентами прохождения, связано с конечной величиной апертуры пучка (8 мм), которая была порядка длины волны. Расчет, проведенный методом Т-матриц, не учитывал конечность апертуры падающей волны. Малость апертуры приводит к заметной дифракционной расходимости и, тем самым, к потере энергии при многократных переотражениях внутри системы. Потеря энергии в свою очередь ведет к уменьшению добротности резонанса и таким образом к размытию пика прозрачности.

Рассмотрим теперь намагниченный образец. При намагничивании до 6 240 Э пик прозрачности, ранее наблюдавшийся при 31 ГГц (см. рисунок 41), сдвигается ближе к частоте 34 ГГц (см. рисунок 42).

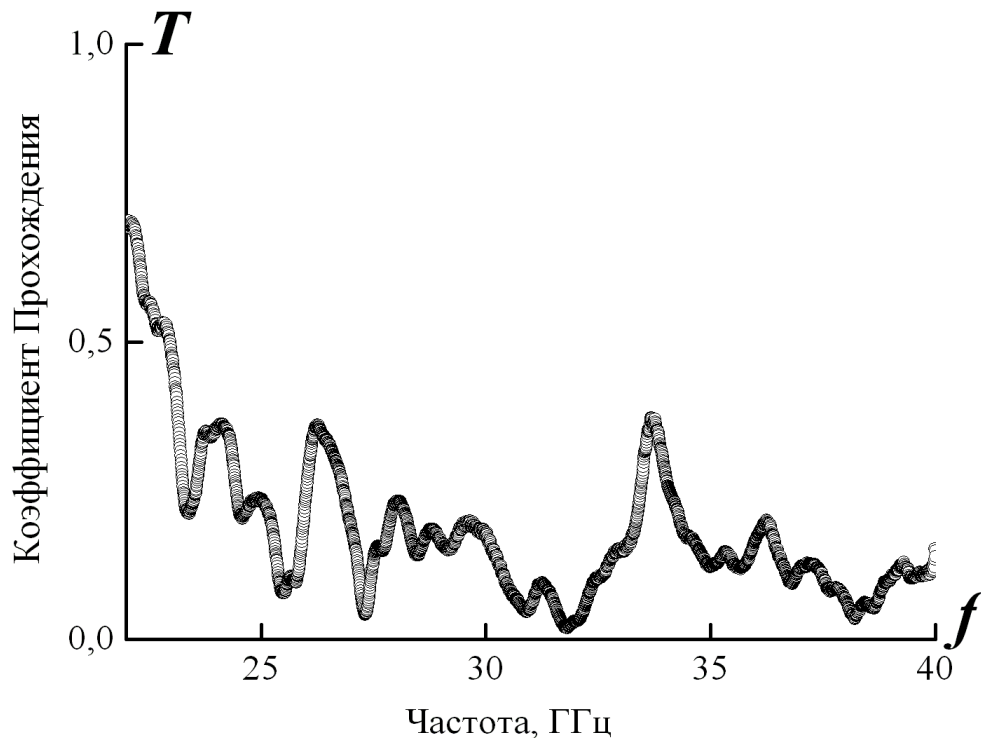


Рисунок 42 – Частотная зависимость коэффициента прохождения $T(f)$ через систему в поле $H_{ex} = 6240$ Э.

Для оценки зависимости частоты таммовского пика прозрачности $f_T(H_{ex})$ от намагничивающего поля была использована известная зависимость тензора магнитной проницаемости μ от частоты f и намагниченности M [77, 78]:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_0 - (1 - \mu_0)(M / M_s)^{3/2} & i\gamma M / f & 0 \\ -i\gamma M / f & \mu_0 - (1 - \mu_0)(M / M_s)^{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0^{(1-M/M_s)^{5/2}} \end{pmatrix}, \quad (58)$$

где $\mu_0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{1 - (\gamma M_s / f)^2}$ – магнитная проницаемость полностью размагниченного феррита (скалярная величина), M_s – намагниченность насыщения, γ – гиромагнитное отношение. Измерения магнитной проницаемости образцов 1СЧ4 ферритов (используемых при создании исследуемой системы), показали, что зависимость намагниченности от намагничивающего поля может быть приближена выражением

$$M = \left(1 - \sqrt{1 - a^{3.01} / (0.2a + 1.1a^3)} \right) / 0.0000021 - 5000, \quad (59)$$

где $a = (H_{ex} + 2000) / 31600$, поле измеряется в эрстедах, а намагниченность в А/м. Данное выражение хорошо согласуется с экспериментом по измерению магнитной проницаемости для феррита марки 1СЧ4 в магнитных полях менее 1 000 Э, то есть когда феррит не насыщен.

Основываясь на зависимостях (58) и (59) для $H_{ex} < 1000 \text{ Э}$ и известной зависимостью при $H_{ex} > 1000 \text{ Э}$ [77], методом Т-матриц была сделана теоретическая оценка зависимости частоты таммовского пика прозрачности от намагничивающего поля. Результаты этого расчета представлены на рисунке 43 (сплошная кривая) и свидетельствуют о том, что по мере намагничивания частота ТС монотонно растет, причем это становится заметно уже в относительно слабых по сравнению с полем насыщения полях.

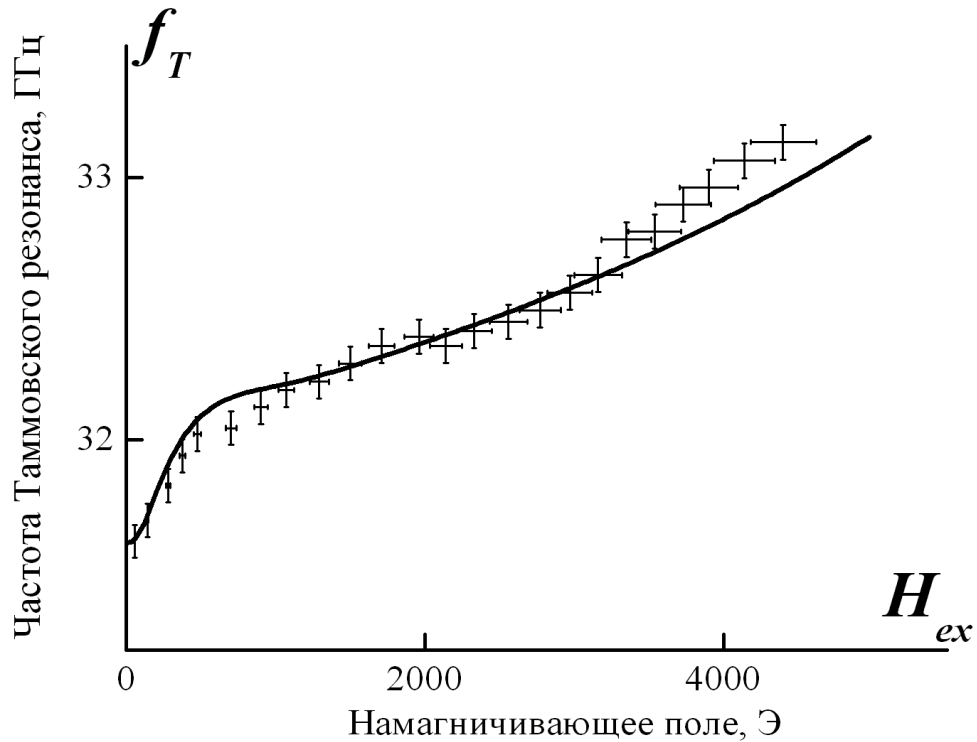


Рисунок 43 – Экспериментальная зависимость (сплошная кривая) и теоретическая оценка (пунктирная кривая) зависимости частоты таммовского состояния $f_T(H_{ex})$ от намагничивающего поля.

Экспериментально измеренная зависимость подтверждает теоретическую оценку. Из рисунка 43 видно, что по мере увеличения намагничивающего поля H_{ex} с 50 Э до 7 000 Э частота ТС монотонно растет от 31 до 34 ГГц, и согласование эксперимента и теории можно считать вполне приемлемым.

Таким образом, экспериментально показана возможность управления частотой ТС при помощи внешнего магнитного поля. При намагничивании удалось сдвинуть частоту таммовского пика прозрачности на 10%.

Данные эксперимента хорошо согласуются с теоретическим предсказанием. Учитывая, что увеличение апертуры падающей волны (и, соответственно, размера образца) должно уменьшить дифракционные потери, что приведет к увеличению добротности резонатора и сужению пика прозрачности, можно надеяться на возможность использования исследуемой системы в качестве магнитоуправляемого фильтра.

Глава 4. Эффект суперпризмы.

Введение

Одним из ярких отличий ФК от однородных материалов является эффект суперпризмы. Этот эффект состоит в том, что вблизи определенного угла падения электромагнитной волны на фотонный кристалл малое (порядка градуса) отклонение угла падения приводит к сильному (более ста градусов) отклонению преломленного луча [59, 60, 79-81]. Причиной этого является то, что при частотах, лежащих выше первой разрешенной зоны, может возникнуть ситуация, когда вдоль некоторых направлений распространение волн запрещено. Граница фотонного кристалла является дифракционной решеткой, и падающая волна рассеивается в несколько лепестков (волн Флоке). При надлежащем выборе угла падения частоты и угла среза ФК падающая волна рассеивается на поверхностной дифракционной решетке, например, на три лепестка: центральный и два боковых. Остальные лепестки являются экспоненциально спадающими волнами. Выбрав форму включения и симметрию решетки можно добиться того, что центральный и один из боковых лепестков не будут распространяться, так как лежат в запрещенных зонах. Изменение угла падения изменяет направления распространения дифрагированных волн. Если при этом боковой лепесток, лежащий в разрешенной зоне, сместится в запрещенную, боковой лепесток, лежащий в запрещенной зоне, сместится в разрешенную, а центральный лепесток останется в запрещенной зоне, то мы будем наблюдать «перескок» преломленного луча с одного бокового лепестка на другой.

С практической точки зрения особый интерес представляет исследование возможности управления эффектом суперпризмы. С целью изучения возможности управления суперпризмой магнитным полем рассмотрены так называемые магнитофотонные кристаллы – фотонные кристаллы, содержащие гироэлектрические (магнитооптические) включения.

Эффект магнитной суперпризмы в двумерном МФК

Рассмотрим прохождение света через двумерный (2D) кристалл, то есть через образец, у которого по двум координатам (x и y) зависимость тензора диэлектрической проницаемости носит периодический характер, в вдоль третьей координаты (z) все параметры постоянны. При этом предположим, что волновой вектор перпендикулярен оси z (см. рисунок 44). Намагничивающее поле B направленно параллельно оси x .

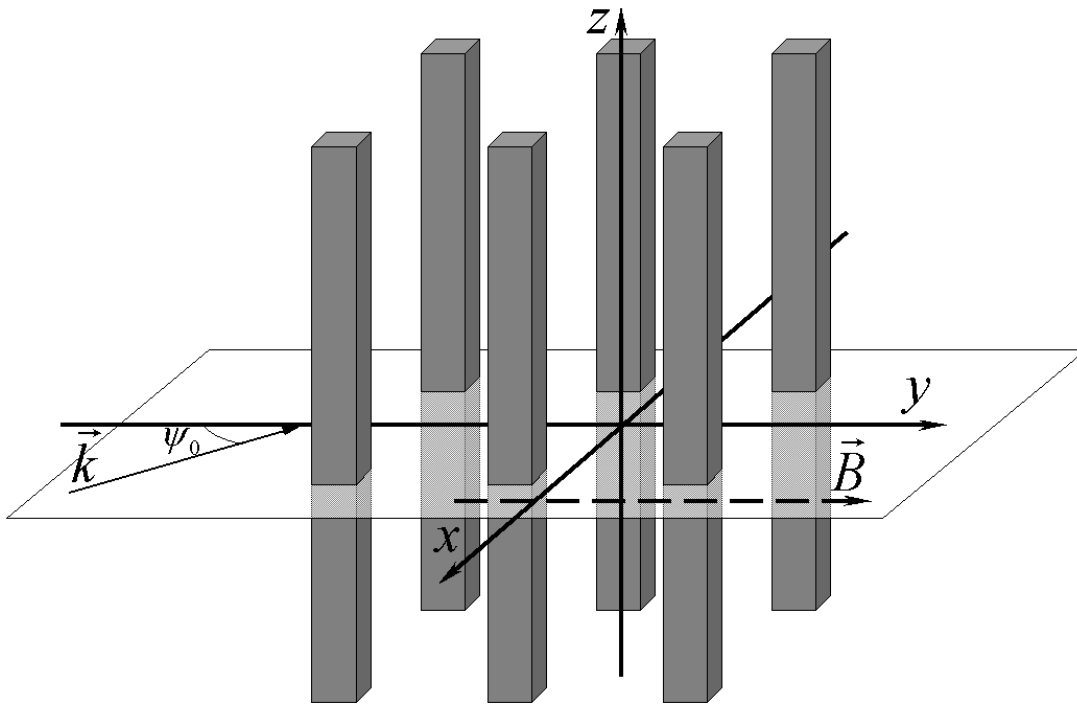


Рисунок 44 – Исследуемая система 2D МФК.

В данном разделе рассматривается фотонный кристалл, сформированный одинаковыми периодически расположенными стержнями, имеющими в сечении квадратную форму. Также для упрощения будем рассматривать квадратную решетку. При этом граница кристалла параллельна плоскости xz .

МО материал описывается тензором диэлектрической проницаемости вида

$$\hat{\varepsilon}(x, y) = \begin{pmatrix} \varepsilon(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon(x, y) & i\alpha(x, y) \\ 0 & -i\alpha(x, y) & \varepsilon(x, y) \end{pmatrix}, \quad (60)$$

причем будем считать, что стержни изготовлены из однородного, изотропного, не МО материала, описывающегося $\varepsilon(x, y) = \varepsilon_1$ и $\alpha(x, y) = 0$, а матрицу будем считать изготовленной из однородного МО материала, описывающегося $\varepsilon(x, y) = \varepsilon_2$, и $\alpha(x, y) = \alpha \sim B$.

Пусть поглощение мало, то есть предполагается, что ε_1 , ε_2 и α чисто действительные. Для диэлектрических стержней предположение о потерях не накладывает существенных ограничений, но для магнитооптической матрицы такое предположение может быть оправданно лишь в случае, если рабочая область частот находится достаточно далеко от резонансной частоты. Это замечание приводит к тому, что необходимо ограничиться рассмотрением лишь малых $\alpha \ll 1$.

При анализе распространения и преломления волн удобнее пользоваться не поверхностями дисперсии $\omega(k)$, которые в трехмерном случае являются трехмерными гиперповерхностями в четырехмерном пространстве, а их сечениями плоскостью постоянной частоты – так называемыми изочастотами [59, 81]. В двумерном случае, когда плоскость падения перпендикулярна образующим двумерного кристалла, изочастота – это линия на плоскости волновых векторов, соединяющая точки, соответствующие решениям уравнений Максвелла на данной частоте. При этом под k подразумевается волновой вектор Блоха k_B .

Метод нахождения изочастот. На данный момент широко известна методика расчета зонной структуры фотонных кристаллов, состоящих из диэлектрических компонентов, которые задаются распределением диэлектрической проницаемости на ячейке.

С другой стороны, группой Третьякова [82] была предпринята попытка описания фотонных кристаллов, имеющих гиромагнитные включения. В своей работе они базировались на методе Plane Wave Summation. К сожалению, применимость данного метода не имеет пока строго обоснования, кроме того, в этом методе возникает проблема суммирования решеточных сумм, и результат существенно зависит от выбора алгоритма суммирования. Но если при длинах

волн много больших размеров ячейки большинство «разумных» методов суммирования дает близкие результаты (в меру малости периода по сравнению с длиной волны), то в области частот, интересной для исследования специфических эффектов распространения света в фотонных кристаллах (таких как возникновение запрещенной зоны, суперпризма и др.), применение Plane Wave Summation заведомо некорректно.

В данной главе предложено обобщение известного метода расчета зонной картины, применяющегося для расчета диэлектрических кристаллов, для расчета кристаллов, имеющих магнитооптические свойства. В отличие от Plane Wave Summation, этот метод не ограничен по частотам и позволяет находить изочастоты для любой частоты. Опишем вкратце предложенный метод.

Распространение электромагнитного поля описывается уравнениями Максвелла

$$\nabla \times \nabla \times E - k_0^2 \hat{\epsilon} \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - k_0^2 \epsilon_0(x, y) E_x \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - k_0^2 \epsilon_0(x, y) E_y - ik_0^2 \alpha(x, y) E_z \\ - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - k_0^2 \epsilon_0(x, y) E_z + ik_0^2 \alpha(x, y) E_y \end{pmatrix} = 0, \quad (61)$$

где учтено, что $\frac{d\vec{E}}{dz} = 0$.

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} + k_0^2 \epsilon_0(x, y) E_x = 0 \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial x} + k_0^2 \epsilon_0(x, y) E_y + ik_0^2 \alpha(x, y) E_z = 0 \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_0^2 \epsilon_0(x, y) E_z - ik_0^2 \alpha(x, y) E_y = 0 \end{cases} \quad (62)$$

Воспользовавшись периодичностью материальных параметров от координат, разложим их в ряд Фурье¹²

$$\varepsilon_0(x, y) = \sum_{n, m=-R}^{n, m=R} \varepsilon_{nm} e^{inx+imy}, \quad \alpha(x, y) = \sum_{n, m=-R}^{n, m=R} \alpha_{nm} e^{inx+imy}$$

В соответствии с теоремой Блоха решением уравнения (62) является волна Флоке-Блоха

$$\vec{E} = \vec{f}(\vec{r}) e^{ik_B(\cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y)}$$

где φ – угол между направлением вектора \vec{k}_B и осью x . Поскольку $\vec{f}(\vec{r})$ – периодическая функция координат, то раскладывая её в ряд Фурье, получим

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n, m=-R}^{n, m=R} a_{mn}^{(x)} e^{ix(n+k_B \cos(\varphi)) + iy(m+k_B \sin(\varphi))} \\ \sum_{n, m=-R}^{n, m=R} a_{mn}^{(y)} e^{ix(n+k_B \cos(\varphi)) + iy(m+k_B \sin(\varphi))} \\ \sum_{n, m=-R}^{n, m=R} a_{mn}^{(z)} e^{ix(n+k_B \cos(\varphi)) + iy(m+k_B \sin(\varphi))} \end{pmatrix}, \quad (63)$$

где $\vec{f}(x, y) = \sum_{n, m=-R}^{n, m=R} \vec{a}_{nm} e^{inx+imy}$, $\vec{a}_{nm} = (a_{nm}^{(x)}, a_{nm}^{(y)}, a_{nm}^{(z)})$.

Подставив в уравнение (62) решение в виде блоховской волны (63) получим уравнения на коэффициенты a_{mn} :

$$\begin{cases} -\left(m + k_B \sin(\varphi)\right)^2 a_{mn}^{(x)} + \left(m + k_B \sin(\varphi)\right)\left(n + k_B \cos(\varphi)\right) a_{mn}^{(y)} + \\ + k_0^2 \sum_{m', n'} \varepsilon_{m-m', n-n'} a_{m'n'}^{(x)} = 0 \\ -\left(n + k_B \cos(\varphi)\right)^2 a_{mn}^{(y)} + \left(m + k_B \sin(\varphi)\right)\left(n + k_B \cos(\varphi)\right) a_{mn}^{(x)} + \\ + k_0^2 \sum_{m', n'} \varepsilon_{m-m', n-n'} a_{m'n'}^{(y)} + ik_0^2 \sum_{m', n'} \alpha_{m-m', n-n'} a_{m'n'}^{(z)} = 0 \\ -\left(n + k_B \cos(\varphi)\right)^2 a_{mn}^{(z)} - \left(m + k_B \sin(\varphi)\right)^2 a_{mn}^{(z)} + \\ + k_0^2 \sum_{m', n'} \varepsilon_{m-m', n-n'} a_{m'n'}^{(z)} - ik_0^2 \sum_{m', n'} \alpha_{m-m', n-n'} a_{m'n'}^{(y)} = 0 \end{cases} \quad (64)$$

¹² Разложение ведется в конечный ряд Фурье, здесь и далее R – максимальный номер учитываемой гармоники, кроме того, для упрощения изложения длины периодов по x и по y приняты равными 2π .

Относительно a_{mn} эта система уравнений является линейной, и потому имеет нетривиальное решение только когда детерминант матрицы, составленной из коэффициентов этой системы линейных уравнений, равен нулю.

$$\det A = 0, \quad (65)$$

где матрица $A(k_B)$ составлена из коэффициентов уравнения (64). Решая уравнение (65), найдем k_B .

Зонная структура магнитооптического фотонного кристалла. В отсутствие намагничивающего поля тензор диэлектрической проницаемости имеет диагональный вид, и кристалл становится обычным 2D фотонным кристаллом. Как известно, в таких кристаллах собственными модами являются ТЕ и ТМ волны, распространяющиеся каждая со своим значением k_B . Таким образом, изочастота состоит из двух кривых: кривой, соответствующей ТЕ решению, и кривой, соответствующей ТМ решению. При включении магнитного поля эти кривые немного (в меру малости параметра α) сдвигаются. Именно этот «малый» сдвиг позволяет управлять эффектом суперпризмы (см. рисунок 45).

Влияние магнитооптики на эффект суперпризмы. В данной задаче малым параметром, «переключающим» решения, является недиагональный элемент тензора диэлектрической проницаемости α . Поскольку $\alpha \sim B$, то показана возможность управления такой системы внешним магнитным.

В отсутствие магнитного поля ($\alpha = 0$) имеется только решение в области 1 (увеличенный вариант области 1 представлен на рисунках 46 и 47).

При включении магнитного поля решение 1 исчезает (см. рисунок 47) и появляется решение в области 2 (увеличенный вариант области 2 показан на рисунках 48 и 49). Причем необходимо отметить, что решение 2 соответствует отрицательному преломлению. Таким образом, реализуется суперпризма, качественно представленная на рисунке 45, с одним лишь отличием, что угол падения (так же, как и частота $k_0 = 0.47304$) остается неизменным и равным ψ_0 ($\psi_0 = 0.9148 = 52.41^\circ$), а меняется лишь внешнее намагничивающее поле.

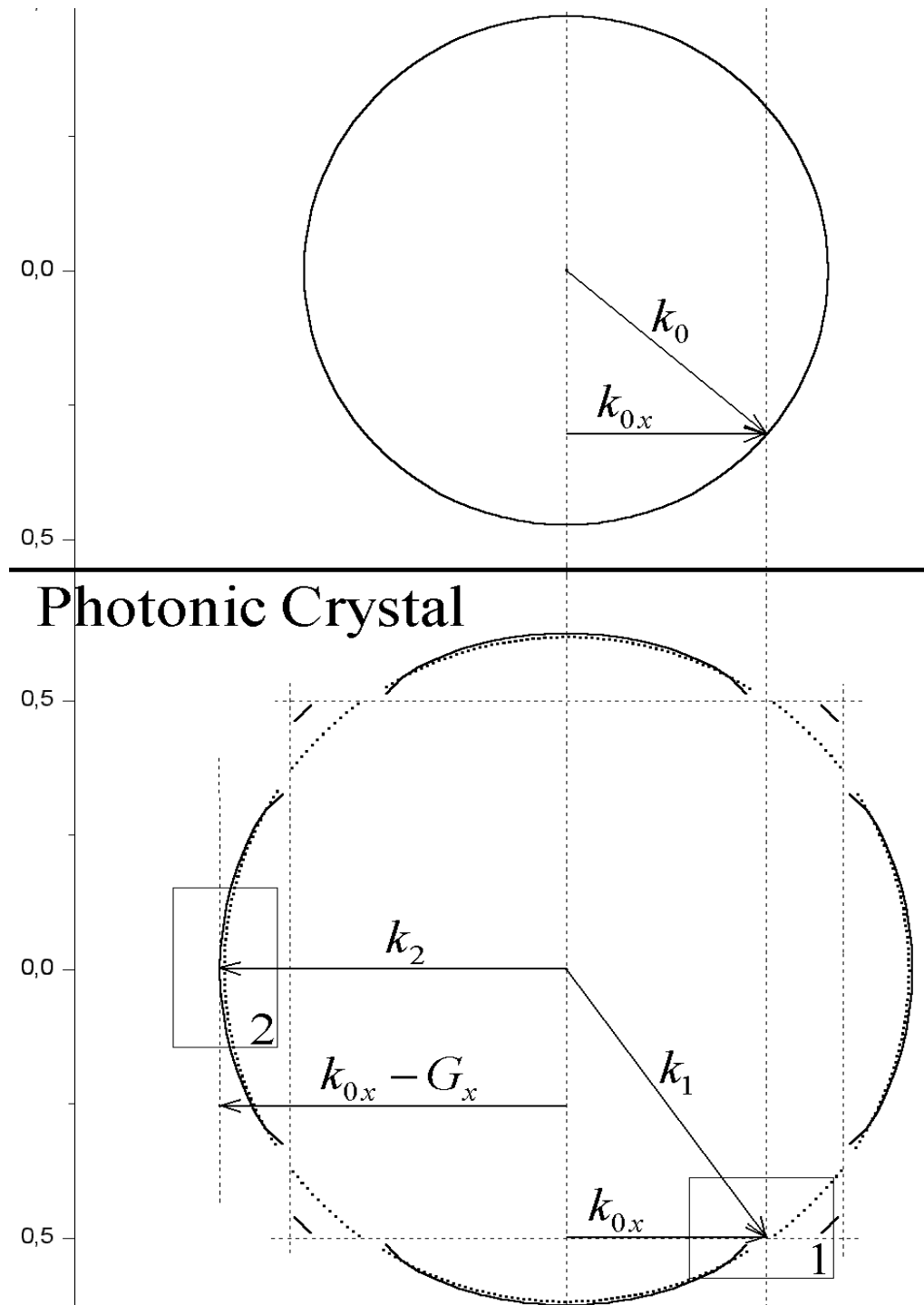


Рисунок 45 – Преломление волны на границе вакуума (верхняя изочастота) и фотонного кристалла (нижняя изочастота). При малом изменении параметра α от 0 до 0.01 наблюдается перескок решения с решения 1 на решение 2. Параметры на графиках $k_0 = 0.47304$, $k_{0,x} = 0.37485$, $G_x = 1$, угол $\psi_0 = 0.9148 = 52.41^\circ$, $\varepsilon_1 = 2.5$, $\varepsilon_2 = 1.5$, площадь стержней равна 1/4 площади ячейки. Пунктирными линиями обозначены вспомогательные линии – вертикали (соответствующие центру изочастот, $k_{0,x}$, $k_{0,x} - G_x$) и границы первой зоны Бриллюэна. На нижней изочастоте (соответствующей кристаллу) непрерывная кривая представляет ТЕ волну, точечная кривая представляет ТМ волну.

Поскольку на рисунке 45 разрешение не позволяет показать всех деталей, то области около решений были выделены и представлены отдельно на рисунках 46 и 47 (соответствующие первому решению и области 1) и рисунках 48 и 49 (соответствующие второму решению и области 2).

Итак, рассмотрим первое решение:

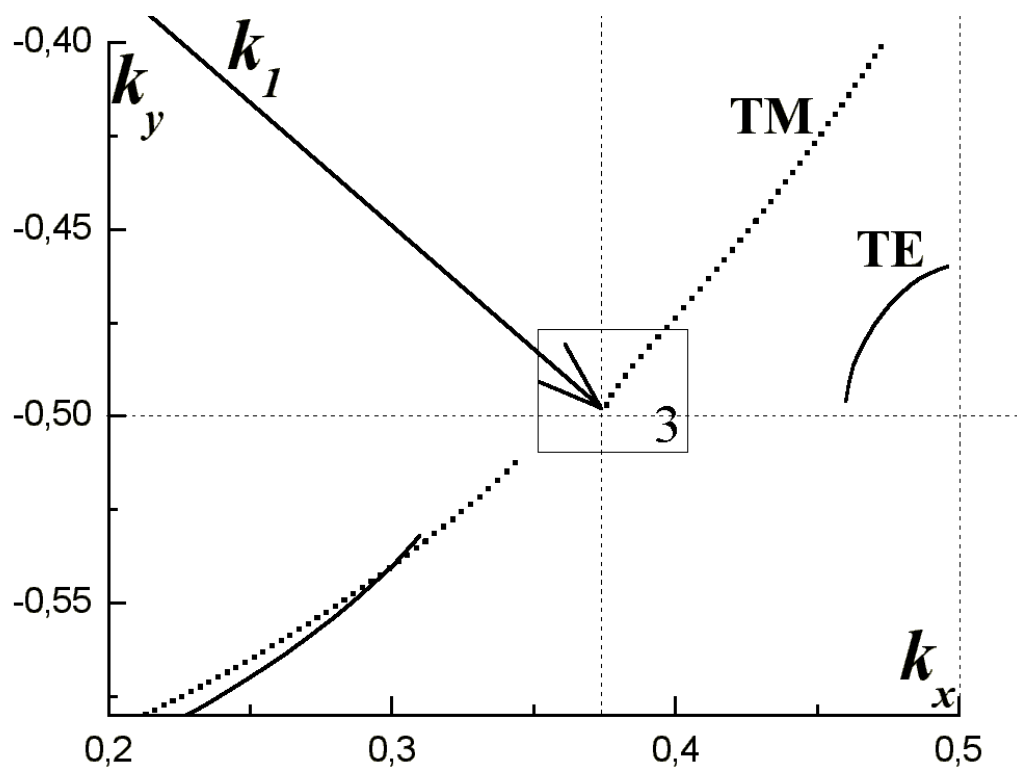


Рисунок 46 – Область 1 рисунка 45 в увеличенном масштабе. Параметры те же, что и на рисунке 45. Непрерывная кривая представляет ТЕ волну, точечная кривая представляет ТМ волну.

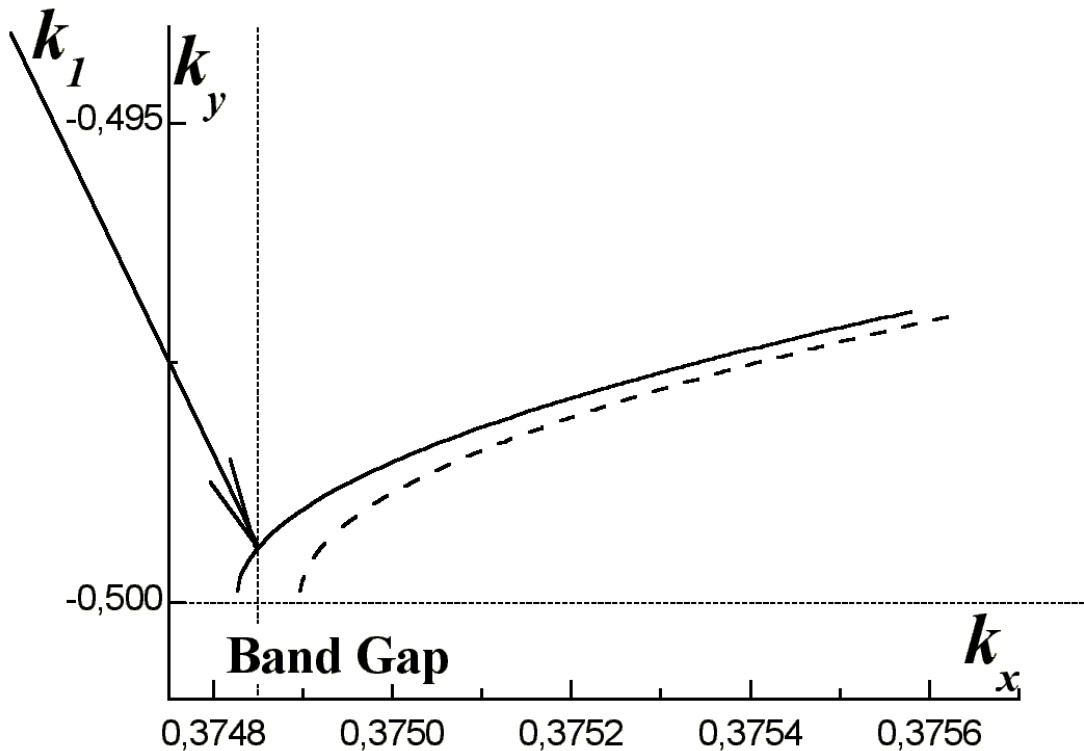


Рисунок 47 – Область 3 рисунка 46 в большем увеличении. Параметры те же, что и на рисунке 45. Непрерывная кривая представляет случай, когда намагничивающее поле равно нулю (эта кривая соответствует ТЕ волне), крупная пунктирная кривая соответствует случаю включенного магнитного поля.

Поскольку x -компонента волнового вектора должна сохраниться (с точностью до обратного вектора решетки G_x), то решение образует пересечение вертикальной прямой (обозначающей k_{0x} и изображенной на рисунке мелким пунктиром) с изочастотой. Как уже отмечалось, групповая скорость перпендикулярна изочастоте и направлена в сторону увеличения частоты. В данном случае групповая скорость направлена в соответствии с первым решением рассматриваемой схемы (см. рисунок 45). Данное решение (решение k_1) соответствует нормальному (положительному) преломлению. При включении магнитного поля изочастота изменяется таким образом, что пересечение с вспомогательной вертикальной прямой исчезает. Следовательно, при включении магнитного поля волна больше не может распространяться в этом направлении.

Рассмотрим теперь второе решение:

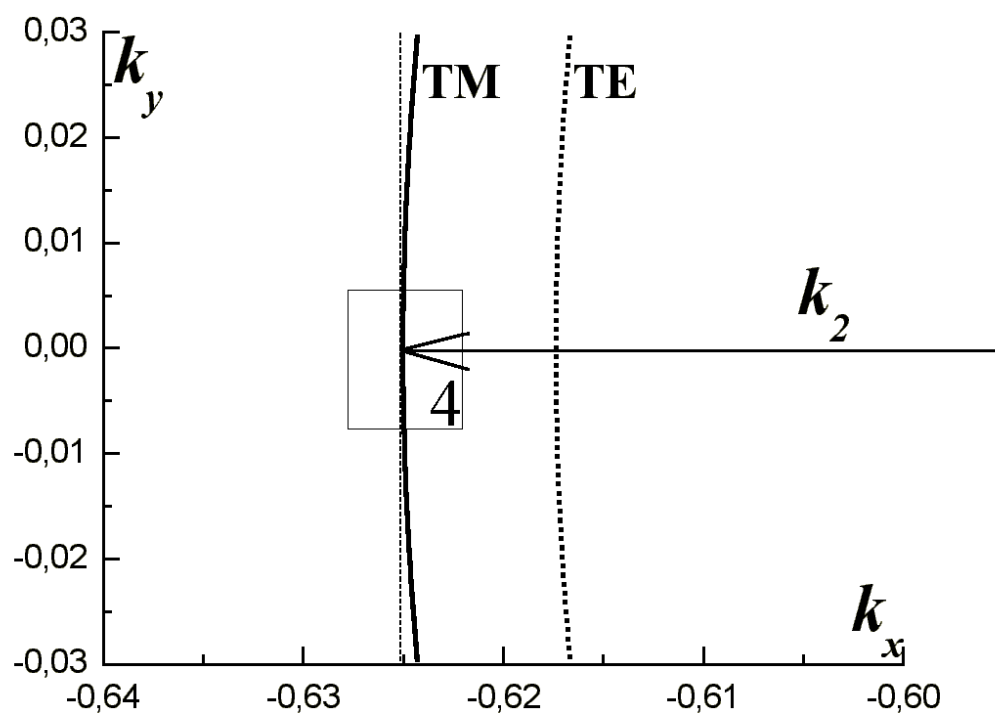


Рисунок 48 – Область 2 рисунка 45 в увеличенном масштабе. Параметры те же, что и на рисунке 45. Непрерывная кривая представляет ТЕ волну, точечная кривая представляет ТМ волну.

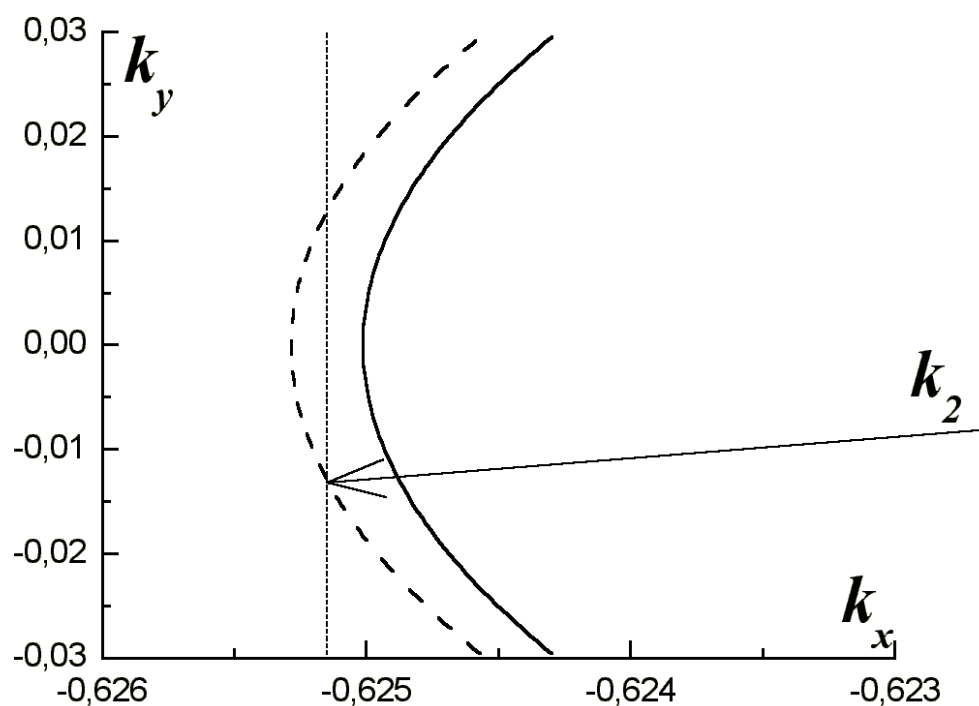


Рисунок 49 – Область 4 рисунка 48 в большем увеличении. Параметры те же, что и на рисунке 45. Непрерывная кривая представляет случай, когда намагничивающее поле равно нулю (эта кривая соответствует ТМ волне), пунктирная кривая соответствует случаю включенного магнитного поля.

В отсутствие магнитного поля изочастота не пересекает вертикаль $k_{0x} - G_x$, и, следовательно, волна не может распространяться в этом направлении. При включении магнитного поля (см. рисунок 49, пунктирная кривая) появляется пересечение, то есть волна может распространяться. При этом групповая скорость в точке пересечения направлена влево, то есть волна будет распространяться влево. Иными словами, здесь наблюдается отрицательное преломление.

Таким образом, включение поля производит «переключение» распространения с решения 1 на решение 2 полностью в соответствии со схемой 2.

Также можно отметить, что, в отличие от часто приводимых примеров суперпризмы, в рассмотренном примере изменение угла падения не приводит к эффекту суперпризмы. Действительно, при уменьшении угла падения (и, соответственно, уменьшении k_{0x}) вообще пропадают решения, в то время как при увеличении угла (и, соответственно, увеличении k_{0x}) появляются два решения.

Среди возможных применений магнитооптических фотонных кристаллов можно было бы ожидать возможность создания материалов с управляемой зонной структурой. Однако управление разрешенными и запрещенными зонами с помощью магнитооптики практически невозможно. Это связано с тем, что для рассмотрения границы запрещенной зоны и эффектов, связанных с изменением границы при наложении внешнего магнитного поля, необходимо создавать достаточно толстые системы (в меру малости индекса Ляпунова). Рассмотрение толстых систем возможно лишь при малом поглощении, как следствие, приходится выбирать рабочие частоты в области, далекой от резонанса, и тем самым в области, далекой от больших значений недиагональных элементов. На малых же значениях недиагональных элементов смещение зон мало и, поскольку полностью избавиться от поглощения не удастся, на данный момент не представляется возможным создавать настолько толстые системы, что можно будет наблюдать влияние намагничивающего поля на зонную структуру.

В отличие от зонной структуры управлять эффектом суперпризмы оказывается возможным. При этом в вычислениях использовались физически разумные значения тензора диэлектрической проницаемости. Последнее замечание позволяет надеяться на воплощение в жизнь данных физических результатов.

Эффект суперпризмы в слоистых фотонных кристаллах.

Уже само название «фотонный кристалл» ассоциируется с трехмерной структурой, и основные усилия исследователей до сих пор были направлены именно на изучение 3D структур. Однако технологические трудности изготовления таких систем заставили использовать в качестве модельных систем 2D структуры. Такой подход привел к тому, что все наиболее яркие предсказанные и экспериментально обнаруженные эффекты связаны именно с 2D и 3D фотонными кристаллами.

В то время как исследование и применение 2D и 3D фотонных кристаллов сталкиваются с проблемами технологического и расчетного характера, 1D фотонным кристаллам (всевозможные плёночные покрытия) уделяется недостаточно внимания. Это связано с предубеждением, что они настолько хорошо изучены, что там вряд ли можно ожидать чего-нибудь нового. Однако практика опровергает такое мнение: подход к 1D структурам как к ФК оказывается очень плодотворным. Например, не так давно было установлено, что использование 1D фотонных кристаллов может на порядки увеличивать магнитооптические свойства вещества [14].

Как уже отмечалось, эффект суперпризмы состоит в том, что вблизи определенного угла падения электромагнитной волны на фотонный кристалл малое (порядка градуса) отклонение угла падения приводит к сильному (более ста градусов) отклонению преломленного луча [59, 60, 79-81]. Причиной этого является то, что на некоторых достаточно высоких частотах изочастота блоховского волнового числа лежит в разных бриллюэновских зонах.

Пересечение границы зон приводит к подавлению прохождения в определенном направлении. Для 2D и 3D фотонных кристаллов граница фотонного кристалла является дифракционной решеткой, и падающая волна рассеивается в несколько лепестков (волн Флоке). При надлежащем выборе угла падения и частоты падающая волна рассеивается на поверхностной дифракционной решетке, например, в три лепестка: центральный и два боковых. Остальные лепестки являются экспоненциально спадающими волнами. Выбрав форму включения и симметрию решетки можно добиться того, что центральный и один из боковых лепестков не будут распространяться, так как лежат в запрещенных зонах. Изменение угла падения изменяет направления распространения дифрагированных волн. Если при этом боковой лепесток, лежащий в разрешенной зоне, сместится в запрещенную, боковой лепесток, лежащий в запрещенной зоне, сместится в разрешенную, а центральный лепесток останется в запрещенной зоне, то мы будем наблюдать «перескок» преломленного луча с одного бокового лепестка на другой.

Геометрия возможного эксперимента представлена на рисунке 50. Для наблюдения дифракционных лепестков на поверхность ФК необходимо нанести дифракционную решетку. Для простоты рассмотрены слои одинаковой толщины d . Диэлектрические проницаемости слоёв равны 1 и 13, что соответствует реальным диэлектрическим проницаемостям в оптике (например, проницаемость чуть больше 13 имеет AsGa). Рассмотрим H -поляризованную волну частоты k_0 (в силу принципа подобия все величины могут быть выражены в единицах d , чем и воспользуемся).

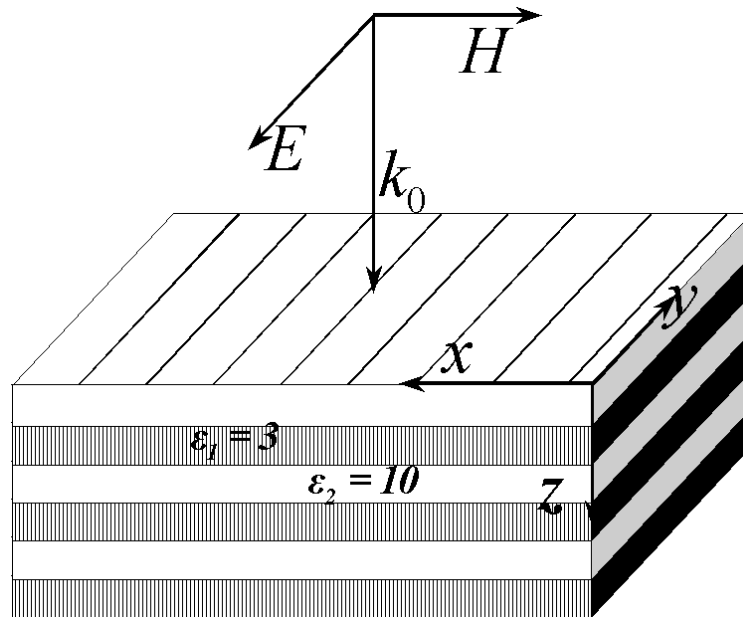


Рисунок 50 – Схема ФК и дифракционной решетки, позволяющих наблюдать эффект суперпризмы.

Для описания эффекта суперпризмы удобно воспользоваться аппаратом изочастот. Изочастотой называется кривая, возникающая в результате пересечения дисперсионной поверхности $\omega(k)$ с плоскостью $\omega = \text{const}$. Этот аппарат чрезвычайно удобен при изучении преломления волн на границе двух сред. Например, рассмотрим падение волны из вакуума на поверхность слоистой среды. Поскольку вдоль поверхности система является трансляционно-инвариантой, компонента волнового вектора (например, k_x), параллельная поверхности, остается неизменной. Таким образом, если известна изочастота для слоистой среды, то по известной проекции k_x можно найти волновой вектор распространяющейся волны в слоистой среде.

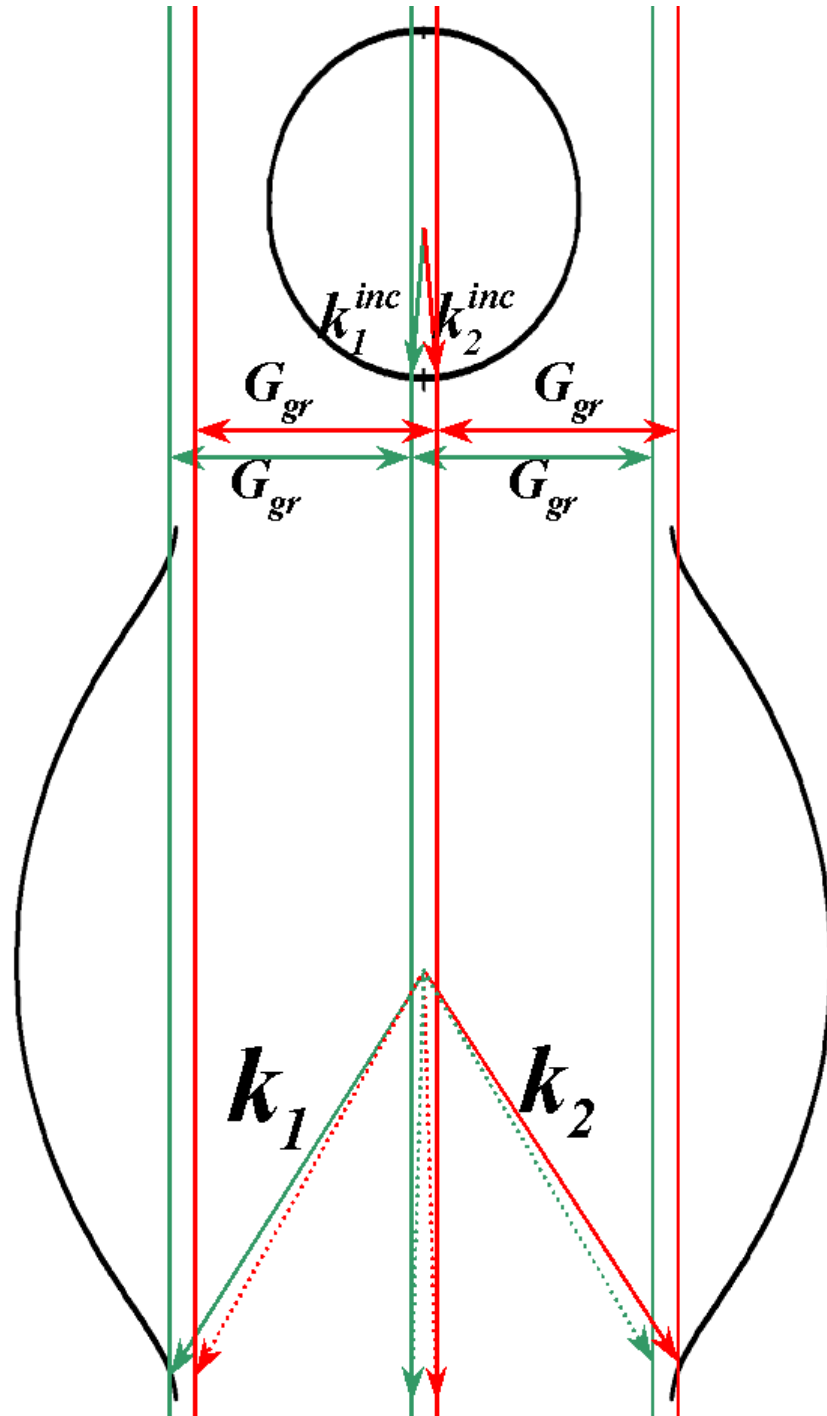


Рисунок 51 – Верхняя часть: изочастота, описывающая волну, падающую из свободного пространства. Нижняя часть: изочастота ФК. Вертикальные (зелёные и красные) линии обозначают сохраняющиеся компоненты k_x , $k_x + G_{grating}$ и

$$k_x - G_{grating}.$$

Соответствующие изочаототы для вакуума и для ФК представлены на рисунке 51. Верхний черный круг соответствует изочаототе вакуума (так как

$k^2 = (\omega/c)^2 = k_0^2$). Нижняя изочастота соответствует ФК. Ее можно найти из известного уравнения

$$\cos(k_z 2d) = \cos(k_{1z}d) \cos(k_{2z}d) - \left(\frac{k_{2z}^2 + k_{1z}^2}{2k_{1z}k_{2z}} \right) \sin(k_{1z}d) \sin(k_{2z}d),$$

где $k_{1z} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_1 - k_x^2}$ и $k_{2z} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_2 - k_x^2}$ – волновые векторы, перпендикулярные слою. В силу трансляционной симметрии вдоль слоев $k_{1x} = k_{2x} = k_x$. Таким образом, получается уравнение, описывающее нижнюю изочастоту:

$$\begin{aligned} \cos(k_z 2d) = & \cos\left(\sqrt{k_0^2 \varepsilon_1 - k_x^2} d\right) \cos\left(\sqrt{k_0^2 \varepsilon_2 - k_x^2} d\right) - \\ & - \left(\frac{k_0^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - 2k_x^2}{2\sqrt{k_0^2 \varepsilon_1 - k_x^2} \sqrt{k_0^2 \varepsilon_2 - k_x^2}} \right) \sin\left(\sqrt{k_0^2 \varepsilon_1 - k_x^2} d\right) \sin\left(\sqrt{k_0^2 \varepsilon_2 - k_x^2} d\right) \end{aligned} \quad (66)$$

Вертикальные линии (зеленая и красная) показывают значения k_x трех лепестков $k = k_{0x}, k_{0x} \pm G_{grating}$, где k_{0x} – соответствующая компонента волнового вектора опадающей волны, а $G_{grating}$ – вектор обратной решетки. При уменьшении угла падения вертикальные линии сместятся влево и останется только одно пересечение, соответствующее распространению решения, обозначенного на рисунке как k_1 . Следовательно, при угле падения, меньшем данного, распространяться будет лишь решение k_1 , а решение k_2 попадет в запрещенную зону. Аналогично, при увеличении угла падения вертикальные пунктирные линии сместятся вправо, и теперь распространяющимся решением будет решение k_2 , а решение k_1 будет в запрещенной зоне. Таким образом, малое изменение угла падения приводит к значительному изменению направления распространяющейся волны и реализуется эффект суперпризмы.

Данная система (так же, как это часто делается для 2D ФК) может быть реализована в виде транкейтед системы. Действительно, несложно заметить, что в фотонном кристалле могут распространяться только волновые векторы k_B по модулю большие, чем k_0 , причем, поскольку волновой вектор принадлежит

первой зоне Бриллюэна, то прибавление или вычитание к k_B вектора обратной решётки фотонного кристалла G_{PC} лишь увеличит модуль вектора Блоха.

Итак, показано, что эффект суперпризмы можно реализовать на слоистой системе. Как отмечалось ранее, 1D ФК обладает рядом принципиальных преимуществ по сравнению с 2D и 3D фотонными кристаллами. Безусловно, основное преимущество заключается в технологической простоте изготовления таких структур.

Однако оказывается, что, кроме технологической простоты создания, 1D кристаллы обладают еще одним принципиальным преимуществом перед 2D и 3D. Это преимущество выражается в «резкости» границы между разрешенной зоной и запрещенной зоной (см. рисунки 52 – 55). «Резкость» означает, что в области частот, находящихся в запрещенной зоне, но близко к границе, наблюдаются достаточно большие значения индекса Ляпунова. Безусловно, по мере приближения к границе индекс Ляпунова стремиться к нулю, но по сравнению с 2D и 3D фотонными кристаллами это убывание (или при углублении в запрещенную зону – возрастание) носит более резкий характер. Это замечание играет важнейшую роль для практического исследования.

Во-первых, при изучении многих эффектов, касающихся фотонных кристаллов (например, вышеописанный эффект суперпризмы) важную роль играет поведение распространения электромагнитной волны именно на границе зон. В случае если граница не «резкая», разница между запрещенной зоной и разрешенной зоной на границе не будет заметна.

Во-вторых, попытки создавать в оптическом диапазоне управляемые кристаллы часто наталкиваются на проблему малости контролирующего параметра (например, подобное имеет место при изучении магнитофотонных кристаллов, аномально большого эффекта Холла, где малым параметром является недиагональная компонента диэлектрической проницаемости $\alpha \sim 10^{-3}$) и, как следствие, малости сдвига границы запрещенной зоны. То есть при изменении внешних контролирующих условий решение сдвигается из разрешенной зоны в

запрещённую, но остается вблизи границы. Следовательно, если индекс Ляпунова мал, то ослабление сигнала в запрещенной зоне в конечном образце тоже мало, и различие в распространении электромагнитной волны в фотонном кристалле при изменении внешних условий едва уловимо. Казалось бы, этого можно избежать, создавая достаточно толстые системы, однако есть третье замечание.

В-третьих, неидеальность изготовления 2D и 3D фотонных кристаллов приводит к тому, что распространяющаяся в фотонном кристалле волна становится частично некогерентной. Неидеальность изготовления приводит к тому, что возникает некая длина рассеяния, на которой волна становится полностью некогерентной. Если индекс Ляпунова настолько мал, что обратная ему величина больше этой длины, то говорить о запрещенной зоне становится бессмысленным, поскольку волна раньше рассеется, чем испытает брегговское отражение. Ту же роль, что и не идеальность, играет и поглощение, поэтому в тех областях, где есть поглощение, важно, чтобы индекс Ляпунова был большим.

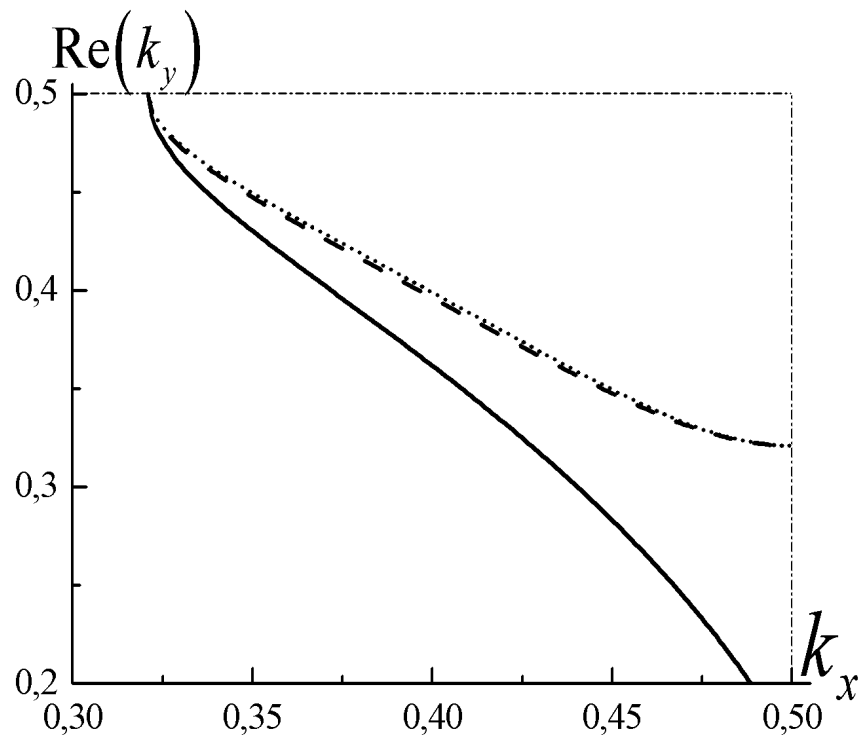


Рисунок 52 – Сравнение изочастот (действительных частей k_y) для 1D фотонного кристалла (сплошная линия) и 2D фотонного кристалла (пунктирная линия и

точечная линии). 1D фотонный кристалл взят в прежних условиях $k_0 d / 2\pi = 0.2$, $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 10$. Пунктирная линия обозначает изочастоту для 2D фотонного кристалла (с тем же, что и у 1D фотонного кристалла, периодом d), образованного матрицей с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{mat} = 3$ и квадратным включением с проницаемостью $\varepsilon_{inc} = 10$, на частоте $k_0 d / 2\pi = 0.2078428$. Точечная линия обозначает изочастоту для 2D фотонного кристалла аналогичной геометрии, образованного матрицей с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{mat} = 10$ и включением с проницаемостью $\varepsilon_{inc} = 3$ на частоте $k_0 d / 2\pi = 0.2105852$. Матрица и включения занимают одинаковые объёмы. Тонкие штрих-пунктирные линии обозначают границы первой зоны Бриллюэна для 2D фотонного кристалла (горизонтальная штрих-пунктирная линия показывается также границу первой зоны Бриллюэна для 1D фотонного кристалла).

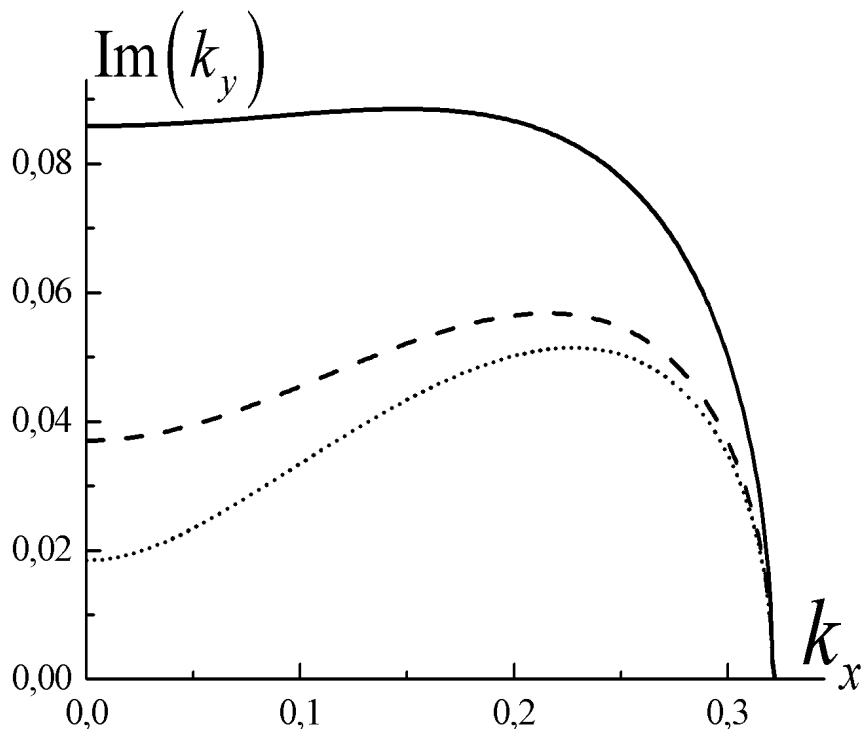


Рисунок 53 – Сравнение показателей Ляпунова (мнимых частей k_y) для 1D фотонного кристалла (сплошная линия) и 2D фотонного кристалла (пунктирная линия и точечная линии). Параметры те же, что и на рисунке 52.

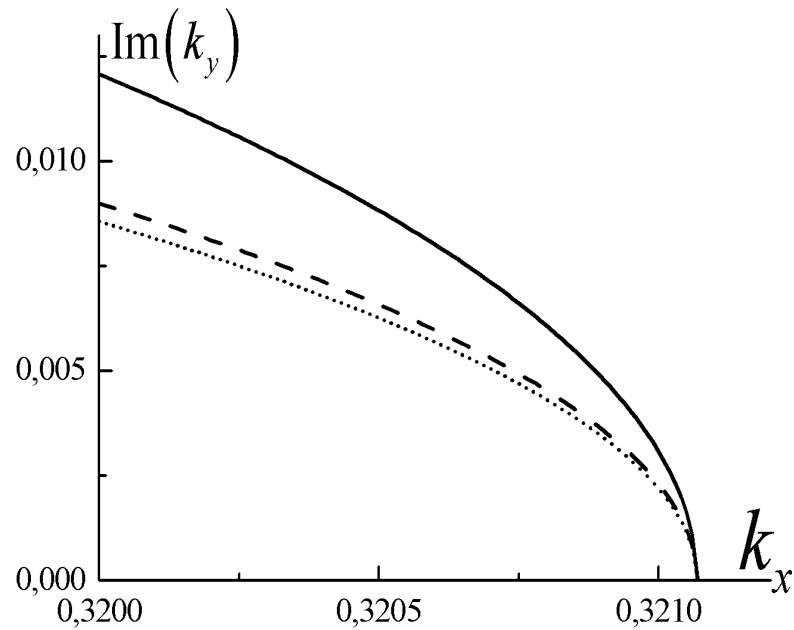


Рисунок 54 – Увеличенный фрагмент рисунка 52 вблизи границы запрещенной и разрешённой зон. Сравнение показателей Ляпунова (мнимых частей k_y) для 1D фотонного кристалла (сплошная линия) и 2D фотонного кристалла (пунктирная линия и точечная линии). Параметры те же, что и на рисунке 52.

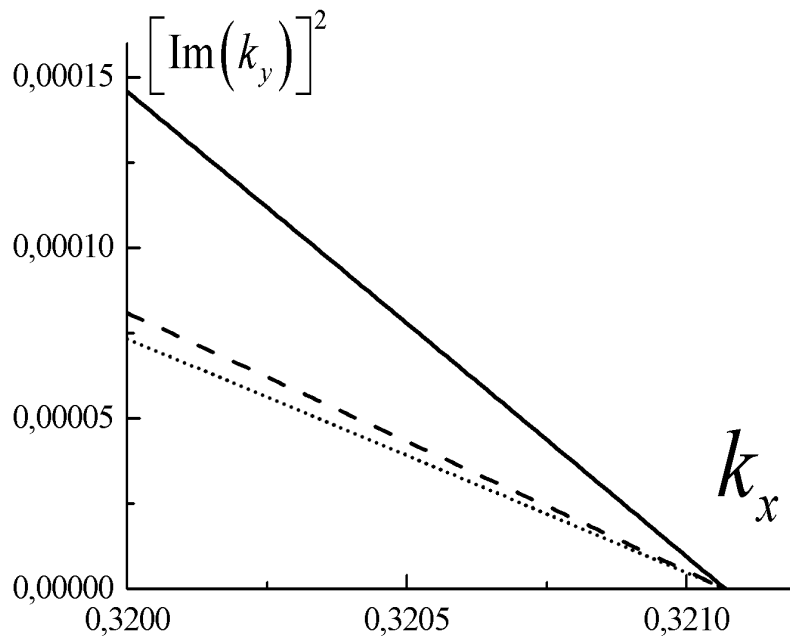


Рисунок 55 – То же, что и на рисунке 54, только возведенное в квадрат. Судя по графику, вблизи границы зон показатель Ляпунова ведёт себя следующим образом: $LE = \alpha \sqrt{k_{critical} - k_x}$, где α различны для систем.

Эффект «суперпризмы» в одномерном магнито-фотонном кристалле

Как было показано в начале главы, эффекта суперпризмы можно добиться при фиксированном угле падения изменением изочастоты. Рассмотренный эффект магнитной суперпризмы был исследован для случая двумерных МФК [83]. Однако, применение двумерных и трехмерных (2D и 3D) ФК сталкивается со значительными проблемами технологического характера. При этом, как было показано в предыдущем разделе, 1D ФК не только лишены этих сложностей, но и обладают принципиальным преимуществом: индекс Ляпунова при смещении вглубь запрещенной зоны возрастает гораздо сильнее, чем в 2D ФК того же состава. Именно это делает 1D ФК более перспективными с точки зрения эксперимента и приложений.

Как и ранее, в дальнейших рассуждениях будет активно использоваться аппарат изочастот. Изочастотой называется кривая, возникающая при сечении дисперсионной поверхности плоскостью постоянной частоты.

В немагнитных слоистых средах симметрия системы приводит к тому, что в качестве двух независимых решений можно выбрать ТЕ и ТМ поляризованные волны. Каждой из этих поляризаций соответствует своя изочастотная кривая. Поскольку магнитооптический параметр мал, то, как правило, включение магнитного поля приводит лишь к малому сдвигу изочастоты, не меняя качественно её формы. Случаи, когда до включения магнитного поля изочастотные кривые ТЕ и ТМ волн имеют пересечение, а при включении магнитного поля происходит расщепление и перезамыкание изочастот, в данном разделе рассматриваться не будет.

Включение магнитного поля, изменяя изочастоту, сдвигает границу запрещенной зоны. Этот сдвиг запрещенной зоны используется для того, чтобы направление распространения волны в МФК, лежащее ранее в разрешенной зоне, после включения управляющего воздействия оказалось в запрещенной зоне или наоборот.

В оптическом диапазоне есть множество прозрачных сред, проявляющих магнитооптические свойства, и выбор использования тех или иных материалов обуславливается техническим удобством изготовления структур. Приведенные расчеты не привязаны к какому-либо одному материалу, использованы типичные значения характерных диагональных и недиагональных компонент диэлектрических проницаемостей в оптическом диапазоне. Для простоты рассматривались слои одинаковой толщины d . Диэлектрические проницаемости МО (до включения внешнего магнитного поля) и диэлектрического слоев равны 2 и 7, что соответствует порядку величин реальных диэлектрических проницаемостей в оптике. Для создания боковых лепестков, как и в предыдущем разделе, можно напылить на поверхность МФК дифракционную решетку (см. рисунок 56).

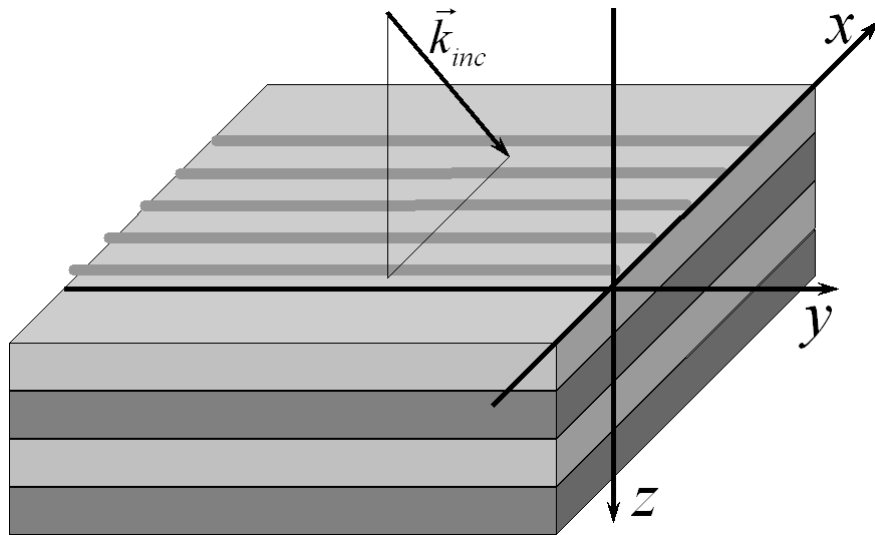


Рисунок 56 – Схема магнитной суперпризмы: на одномерный фотонный кристалл нанесена дифракционная решетка (система полос, параллельных оси y).

Намагничивающее поле прикладывается вдоль оси x . Диэлектрическая проницаемость немагнитного слоя $\varepsilon = 7.0$, диагональная компонента проницаемости МО слоя $\varepsilon = 2.0$, недиагональная компонента МО слоя $\alpha = 0.05$, частота $k_0 d = 0.7$, где d – толщина слоя. Плоскость падения волны – плоскость zx , т.е. проекция волнового вектора на ось y равна нулю $k_y = 0$.

Для нахождения изочастот воспользуемся методом Т-матриц. Поскольку собственные моды в разных слоях различны, необходимо выбрать единое представление для Т-матриц для всех слоев. Например, можно связывать Т-матрицами тангенциальные компоненты полей по разные стороны от слоя

$$\begin{pmatrix} E_x \\ H_y \\ E_y \\ H_x \end{pmatrix}_{left} = M \begin{pmatrix} E_x \\ H_y \\ E_y \\ H_x \end{pmatrix}_{right}. \quad (67)$$

Т-матрица всей системы представляет собой произведение отдельных Т-матриц слоев. Рассмотрим периодическую структуру, и для простоты будем считать, что период состоит из двух слоев. Поскольку собственное решение при прохождении по слою изменяется лишь на соответствующую фазу, то после приведения Т-матрицы к диагональному виду $T = SJS^{-1}$ матрица J будет иметь вид матрицы распространения

$$J_n = \begin{pmatrix} e^{ik_1 d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ik_2 d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_3 d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{ik_4 d} \end{pmatrix}, \quad (68)$$

где k_i – искомые блоховские волновые векторы.

Таким образом, имеется четыре собственных волновых числа, определяемых четырьмя собственными значениями e^{ikL} , где L – период ФК. Для нахождения собственных значений матрицы T нужно решить соответствующее характеристическое уравнение:

$$\det |T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0, \quad (69)$$

которое в данном случае является уравнением 4-ой степени.

Учитывая особенность симметрии рассматриваемой системы, можно упростить решение этого уравнения. Ячейка кристалла состоит из двух слоев, и такая система инвариантна относительно отражения от плоскости, параллельной слоям и помещенной посередине одного из слоёв. Следовательно, волновые векторы имеют вид $\pm k_1$, $\pm k_2$ и характеристическое уравнение (69) сводится к

$$\lambda^4 - a\lambda^3 + b\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0, \quad (70)$$

где

$$a = \sum_{i=1}^4 T_{ii} \text{ и } b = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^4 [T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}] \quad (71)$$

являются инвариантами, не зависящими от представления Т-матриц.

Вычислив Т-матрицу ячейки, можно найти эти инварианты. С другой стороны, поскольку характеристическое уравнение (70) инвариантно относительно приведения матрицы к жорданову виду, подставив вместо матрицы Т матрицу J, получим

$$\begin{cases} \text{Tr}(T) = \sum_{i=1}^4 T_{ii} = 2(\cos(k_1 2d) + \cos(k_2 2d)) \\ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^4 [T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}] = 2 + 4\cos(k_1 2d)\cos(k_2 2d) \end{cases} \quad (72)$$

Уравнения (72) являются обобщением хорошо известного [41] дисперсионного уравнения $\text{Tr}(T) = 2\cos(k_{Bl} 2d)$. Решая эти уравнения, найдем волновые векторы и, тем самым, изочастоту.

Результаты расчета представлены на рисунках 57-59. Сплошные линии обозначают изочастоты, вертикальный пунктир – сохраняющуюся проекцию волнового вектора k_{inc} на ось x.

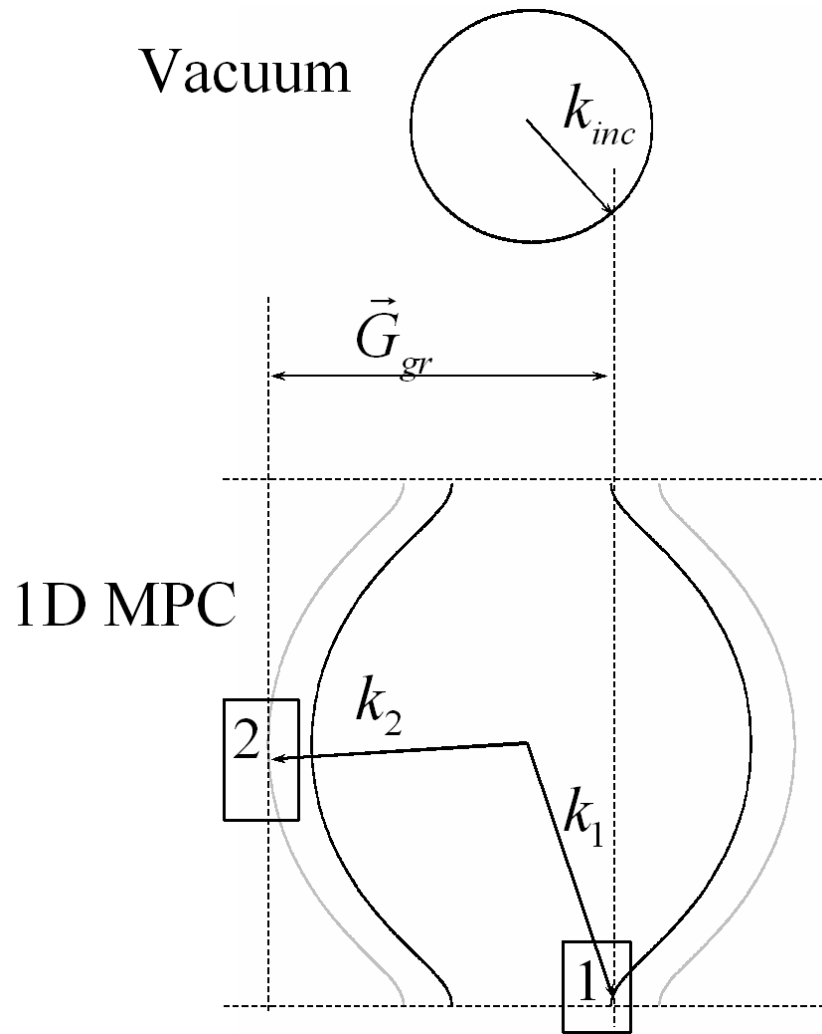


Рисунок 57 – Изочастотная картина, соответствующая системе из рисунка 56. В отсутствие намагничивающего поля черная кривая соответствует ТМ поляризации, а серая – ТЕ поляризации. Так как изменения изочастот при включении магнитного поля малы, то участки 1 и 2, ответственные за эффект суперпризмы, изображены в увеличенном виде на рисунках 58 и 59.

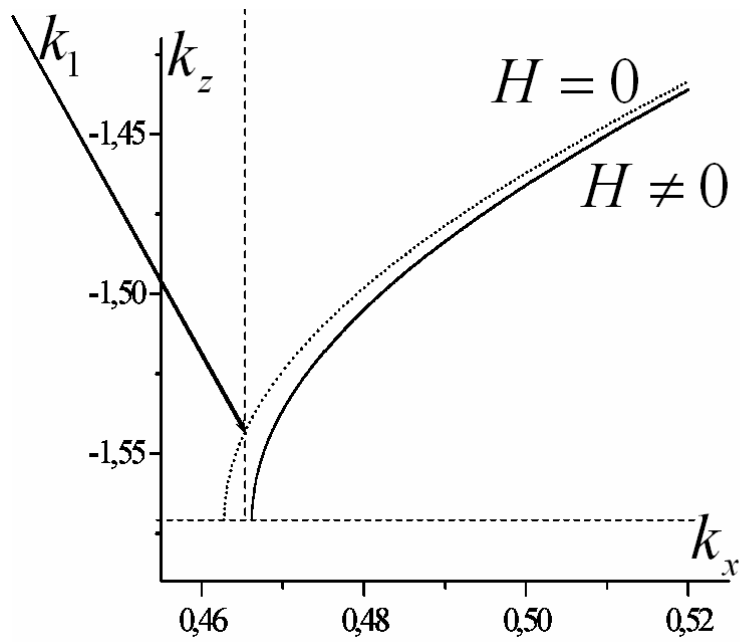


Рисунок 58 – Увеличенная область 1 из рисунка 57. Точечная кривая соответствует случаю без магнитного поля и представляет ТМ поляризацию.

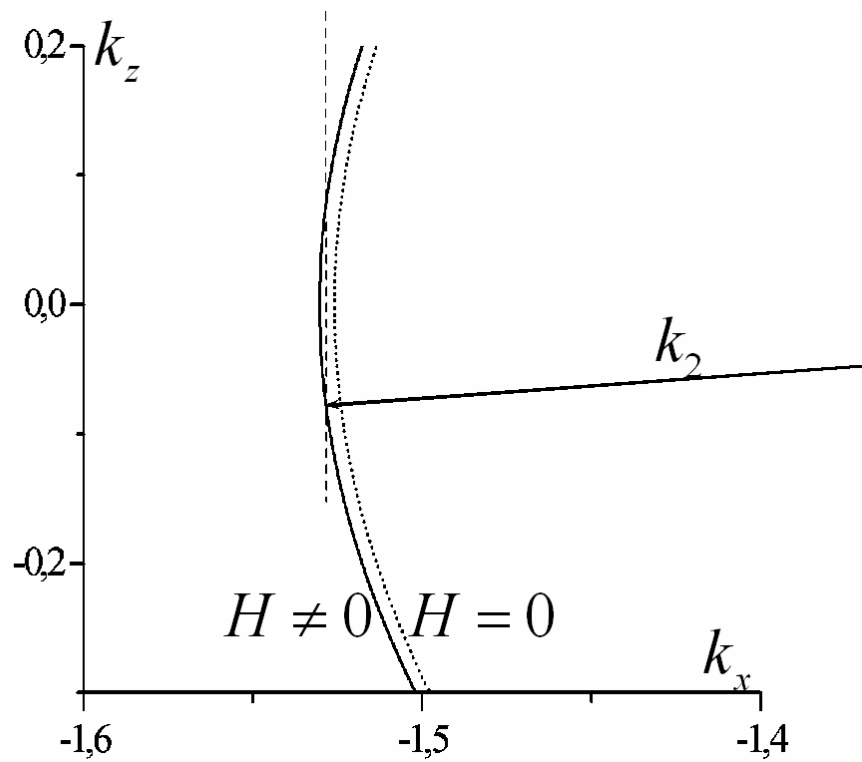


Рисунок 59 – Увеличенная область 2 из рисунка 57. Точечная кривая соответствует случаю без магнитного поля и представляет ТЕ поляризацию.

На рисунке 57 верхняя изочастота соответствует вакууму, G_{gr} – обратный волновой вектор дифракционной решетки, нанесенной на поверхность фотонного кристалла.

Блоховским волнам, возбуждаемым в ФК (см. рисунок 57, нижний график), соответствуют точки пересечения перпендикуляров к плоскости ФК, проходящих через концы волновых векторов дифракционных лепестков (k_{incx} и $k_{incx} - G$, ...). При нулевом намагничивании есть всего одно пересечение в области 1 (см. рисунки 57 и 58.), соответствующее распространению «преломленной» волны. Волновой вектор этой волны обозначен как k_1 . Направление падения света выбрано так, что в области 2 рисунка 57 в отсутствие магнитного поля нет такого пересечения, но вектор, обозначенный как k_2 , весьма близок к этой реализации. При включении магнитного поля изочастота изменяется, и теперь распространяющимся «преломленным» решением будет решение с k_2 . Таким образом, включение магнитного поля приводит к значительному изменению направления распространяющейся волны, и реализуется эффект суперпризмы.

Приведенные выше рассуждения касались лишь волновых векторов. Однако электромагнитная волна характеризуется не только волновым вектором, но и поляризацией. В 1D ФК волны с разными поляризациями имеют существенно различные изочастоты. В рассматриваемом случае до включения магнитного поля в ФК распространялась только ТМ поляризованная волна (магнитное поле волны параллельно диэлектрическим слоям). Важно отметить, что ТМ волна слабо рассеивается дифракционной решеткой, и на выходе из дифракционной решетки практически вся энергия сосредоточена в центральном лепестке. Поэтому параметры в системе выбраны так, чтобы решение, распространяющееся вдоль k_1 , соответствовало центральному лепестку дифракционной решетки. Чтобы возбудить это решение, падающая волна должна содержать ТМ компоненту поля. ТЕ компонента не будет распространяться.

После включения магнитного поля центральный лепесток попадает в запрещенную зону, и возникает распространяющееся решение k_2 . До включения

магнитного поля область 2 отвечала ТЕ поляризованной волне и, следовательно, после включения малого магнитно поля эллипс поляризации решения k_2 будет вытянут вдоль ТЕ (электрическое поле параллельно слоям) поляризации. Естественно, что такое решение будет эффективно возбуждаться падающей ТЕ поляризованной волной. При этом ТЕ волна сильно рассеивается дифракционной решеткой, и на выходе из дифракционной решетки гармоника, соответствующая первому боковому лепестку (который как раз и возбуждает решение k_2), может нести значительную часть энергии [84]. Таким образом, для наблюдения в исследуемой системе эффекта магнитной суперпризмы падающая волна должна содержать как ТЕ, так и ТМ поляризацию, то есть быть эллиптически поляризованной.

Таким образом, эффект магнитной суперпризмы можно реализовать в слоистой системе. В данной системе оказалось, что второй лепесток (решение k_2) не может распространяться в вакууме. Действительно, соответствующая ему вертикальная пунктирная прямая не пересекает окружность изочастоты, соответствующей вакууму. Поэтому лепесток не может выйти из ФК в вакуум. Однако на практике слоистый МФК напыляется на подложку, диэлектрическая проницаемость которой может в несколько раз превосходить проницаемость вакуума. Такому материалу будет соответствовать изочастота в виде окружности радиуса большего, чем окружность изочастоты вакуума, и для решения k_2 появится пересечение между вертикальной пунктирной прямой и изочастотой материала подложки. Иными словами, и второе решение сможет покинуть ФК.

В настоящем разделе сдвиг запрещенной зоны используется для того, чтобы направление распространения волны в МФК, лежащее ранее в разрешенной зоне, после включения управляющего воздействия оказалось в запрещенной зоне или наоборот. Малый сдвиг границы означает малость индекса Ляпунова, описывающего ослабление сигнала в запрещенной зоне, и требует использовать достаточно толстые образцы, чтобы достичь желаемого ослабления. Однако в толстых образцах начинают проявляться эффекты, связанные с

поглощением и неидеальностью структуры МФК. Если длина рассеяния на неоднородностях МФК становится сравнимой с величиной, обратной индексу Ляпунова, то говорить о запрещенной зоне становится бессмысленным, поскольку волна раньше рассеется, чем испытает брэгговское отражение.

Глава 5. Андерсоновская локализация света в магнитных и анизотропных слоистых средах.

Введение

Распространение света в гетерогенных (периодических и неупорядоченных) средах – одна из фундаментальных проблем электродинамики, привлекающих большое внимание физиков (см., например, обзоры [85, 86]). Наиболее интересные явления в таких средах – формирование запрещенных зон и локализация света.

Локализация была предсказана Андерсоном, для случая электронов в твердом теле [87]. Было показано [87], что в любой одномерной неупорядоченной системе электрон всегда локализован. Локализация в данном случае означает, что волновая функция электрона экспоненциально затухает при удалении от центра локализации. Характеристическая длина данного затухания называется длиной локализации L_{loc} .

Уравнения Шредингера и Максвелла могут быть переписаны в виде волнового уравнения. Из этого сходства следует, что в одномерных неупорядоченных системах свет также должен быть локализован [88-90]. Более того, изучать локализацию на примере электромагнитных волн легче, ввиду отсутствия взаимодействия между фотонами.

Несмотря на сходство уравнений Шредингера и Максвелла, локализация света имеет некоторые особенности [90]. Основное отличие заключается в векторной природе электромагнитных волн. В случае наклонного падения коэффициенты отражения для s- и p-поляризованных волн различны, даже для изотропных материалов [91]. Поэтому естественно ожидать, что свойства локализации будут зависеть от поляризации волн [5, 92]. Действительно, в [5] показано, что при наклонном падении электромагнитной волны на неупорядоченную систему немагнитных диэлектрических слоев длины

локализации существенно отличаются для разных поляризаций. Например, в случае бинарной системы (слои из двух типов материала) при угле падения, соответствующем углу Брюстера для перехода из одного материала в другой, наступает делокализация для р-поляризации, тогда как s-поляризованная волна локализована при любом угле падения.

Как и в случае электронов, основной характеристикой локализации света является длина локализации, которую можно определить как масштаб длины, на котором коэффициент прохождения t в среднем экспоненциально затухает по мере увеличения толщины системы [1]:

$$L_{loc} = \frac{1}{\gamma} = \lim_{L \rightarrow \infty} (L / \langle \ln |t| \rangle).$$

Здесь также определена величина γ , называемая показателем Ляпунова.

Несмотря на то, что эффект локализации открыт более полувека назад [87], до сих пор существует лишь феноменологическая теория этого эффекта, точнее сказать, феноменологические теории (скейлинг [93-95], метод стохастизации фазы [96], эффект большого когерентного обратного рассеяния [1]). Все они, как правило, являются методами расчета параметров, описывающих рассматриваемый эффект. Критерием истинности служит схожесть полученных результатов с результатами численных экспериментов.

Несмотря на отсутствие единой теории, для одномерной задачи доказан ряд фундаментальных фактов. В частности доказано, что в случайной одномерной системе с вероятностью 1 при достаточно общих условиях наблюдается локализация [89, 97]. Однако данные доказательства носят характер теорем существования (они лишь дают достаточные условия для существования локализации), кроме того, излишняя математизированность и отсутствие физической интерпретации тормозят развитие теории.

Например, поскольку все одномерные системы можно описывать матрицами (при этом матрица, описывающая сложную систему, есть произведение матриц частей этой системы), то при исследовании локализации

электромагнитных волн часто ссылаются на теорему Фурстенберга [89, 98], устанавливающую общее поведение произведения большого числа матриц. Более точно:

Если G некомпактная подгруппа $SL(m, R)$, такая, что не существует приводимой подгруппы G конечного индекса, тогда $\|X_n X_{n-1} \dots X_1 x\|$ возрастает экспоненциально при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью 1, более точно $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|X_n X_{n-1} \dots X_1 x\| = \gamma > 0$ с вероятностью 1, для всех $x \neq 0$, причем γ определяется только G .

Где $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ - случайная последовательность матриц из подгруппы G , $\|x\|$ обозначает норму вектора.

Таким образом, при увеличении случайной системы с вероятностью 1, экспоненциально растут все элементы матрицы, описывающей эту систему. Действительно, если обратить внимание на запись T-матрицы через коэффициенты прохождения и отражения

$$T = \begin{pmatrix} t_L - \frac{r_R r_L}{t_R} & \frac{r_R}{t_R} \\ -\frac{r_L}{t_R} & \frac{1}{t_R} \end{pmatrix},$$

то несложно заметить, что это соответствует экспоненциальному убыванию коэффициента прохождения.

Необходимо отметить, что из теоремы Фурстенберга не следует, что при нарушении условий этой теоремы нет экспоненциального роста с вероятностью 1, то есть локализации.

В данный момент не существует принципиальных сложностей для того, чтобы ставить численные эксперименты в этой области. С другой стороны, отсутствует теория данного эффекта. По-видимому, эти два факта и являются причиной многочисленных публикаций в последнее время в данной области [99-113 и др.].

Итак, рассмотрим волну, падающую на образец, состоящий из слоев со случайными параметрами (система случайных параметров порождена случайным процессом). Принято считать, что эффект локализации заключается в том, что в бездиссипативной системе интенсивность волны экспоненциально уменьшается по мере углубления в образец [1]. Для различных реализаций случайного процесса характер спада волны носит немонотонный характер. По этой причине характерный параметр, описывающий эффект, – длину локализации – приписывают не отдельному образцу, а ансамблю, порожденному конкретным случайным процессом. Это так называемый статистический подход, в котором интересны величины, усредненные по ансамблю (математические ожидания). Необходимо отметить, что возможна иная трактовка: приписывать длину локализации не ансамблю, а отдельной бесконечной реализации. Эта трактовка основана на гипотезе о том, что все бесконечные реализации случайного процесса с вероятностью 1 имеют одинаковую длину локализации. Во втором подходе, как видно, интересны не средние величины, а наиболее вероятные значения величин (моды). Численные эксперименты подтверждают эту гипотезу об одинаковости длин локализации для различных реализаций данного случайного процесса.

Основное продвижение в понимании явления было сделано после осознания того, что флуктуирующей величиной, претендующей на роль гауссовой, является не поле (коэффициент прохождения), но логарифм поля. Действительно, коэффициент прохождения может испытывать флуктуации, достигая величин, близких к единице, в то время как его логарифм ведет себя «спокойнее».

В приближении однократного рассеяния [1] при прохождении случайных слоев коэффициенты прохождения умножаются, таким образом, итоговый коэффициент прохождения является (по порядку величины) произведением

$$t = t_1 t_2 t_3 \dots t_n . \quad (73)$$

То есть $\ln|t|$ – аддитивная функция системы и, следовательно, по теореме Чебышева $\ln|t|/n$ при больших n распределена по Гауссу, поэтому ее можно

усреднить по ансамблю всех реализаций данного случайного процесса. Тогда длина локализации соответственно

$$L_{loc} = 1/\gamma_{loc} = -\frac{L}{\langle \ln(T) \rangle}, \quad (74)$$

где L – толщина всей системы. Поскольку для гауссова распределения максимум совпадает со средним, то оба определения длины локализации эквивалентны.

Вообще говоря, проведенные рассуждения ни в коей мере нельзя назвать строгими, это лишь качественное объяснение. В действительности коэффициенты прохождения не перемножаются, это лишь грубое приближение. Поскольку в периодических средах коэффициенты прохождения ведут себя иначе, то существует мнение, что эффект существует только в случайных средах [114].

Все подходы к проблеме локализации можно грубо поделить на два вида. Подходы первого вида являются строго математическими. На этом пути удалось выяснить достаточные условия для локализации (теорема Фурстенберга [89]). Так же удалось точно найти все величины, описывающие локализацию в дельта-коррелированном процессе [115-118 и др.]. Однако, в математическом подходе не рассматривается вопрос о причинах локализации и, естественно, ответа на него не могло быть получено, даже для дельта-коррелированного процесса.

Второй путь связан с выдвижением физических гипотез относительно механизма локализации и с вычислением на основе этих гипотез характерных параметров: длины локализации, дисперсии длины локализации и др. Среди подходов на этом пути следует отметить: скейлинговую теорию Таулесса [93-95, 119-121 и др.], скейлинговую теорию Дейча [122, 123], введение эргодической гипотезы [124], ренормализацию коэффициента диффузии [1], стохастизацию фазы [96, 97]. Существенными минусами этих подходов является то, что, во-первых, каждый подход основан на не обоснованном строго выборе той или иной гипотезы, то есть строится заведомо феноменологическая теория. Во-вторых, каждый из этих подходов удовлетворительно описывает лишь какой-либо конкретный случайный процесс. Иными словами, даже отсутствует единая

феноменологическая теория. В-третьих, введение этих гипотез, как правило, связано с упрощением расчета основных параметров эффекта (длины локализации и др.), при этом не ставится и не решается вопрос о причинах возникновения самой локализации.

Исследование локализации в дельта-коррелированном процессе занимает важную часть всех исследований по локализации [114-118, 125, 126]. Это связано, с одной стороны, с относительной простотой аналитического исследования, с другой стороны, с важностью для понимания эффекта локализации. Простота исследований обусловлена возможностью не учитывать резонансы на отдельных слоях. Как уже отмечалось, в дельта-коррелированном процессе нет масштаба, характеризующего толщину отдельного слоя, поэтому должна быть применима теория скейлинга.

В рамках дельта коррелированного процесса без поглощения найдены моменты распределения коэффициента прохождения [115]. А именно, при $\tau \gg 1$

$$\langle |t|^{2n} \rangle \approx \frac{[(2n-3)!!]^2 \pi^2 \sqrt{\pi}}{2^{(2n-1)} (n-1)!} \tau^{-3/2} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right),$$

где $\tau = DL$, $D = \frac{k^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} B(s) \cos(2ks) ds$, где $B(x-x') = \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x') \rangle$, а L – толщина

образца. Из того, что все моменты стремятся к нулю, делается вывод о том, что локализация наступает с вероятностью 1. Показано также, что средняя интенсивность постоянна и не зависит от флуктуаций параметров среды, а более высокие моменты поля неограниченно растут.

Как отмечалось ранее, существует точка зрения, что эффект локализации обусловлен когерентным обратным рассеянием [1]. Эффект когерентного обратного рассеяния проявляется в том, что при падении волны на образец отраженная волна состоит из двух частей: диффузионной изотропной и волны, отразившейся строго обратно падающей. Появление обратно отразившейся волны и называется когерентным обратным рассеянием. Качественно когерентное обратное рассеяние можно объяснить следующим образом: если есть путь

рассеяния луча, такой, что волна входит в образец в точке A по направлению x , а выходит в точке B по направлению $-x$, то в системе есть противоположный путь рассеяния, когда волна входит по направлению x в точке B , а выходит по направлению $-x$ в точке A , проходя этот же путь но в обратном направлении (см. рисунок 60). Поскольку эти две рассеянные волны проходят один оптический путь, то они усиливают друг друга.

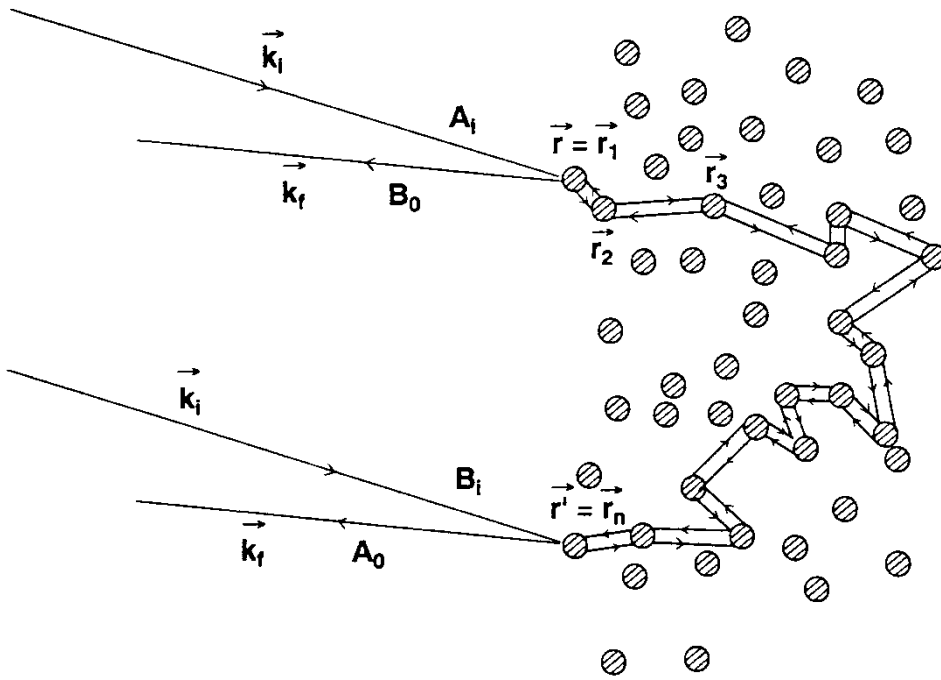


Рисунок 60

КОР приводит к ренормализации коэффициента диффузии [1]:

$$\frac{1}{D(k_0)} = \frac{1}{D_0(k_0)} \left[1 + \frac{dk_{eff}^2 / dk_0^2}{\pi \rho(k_0)} \int_{L^{-1}}^{l^{-1}} \frac{dQ}{(2\pi)^{\dim}} \frac{1}{-i\Delta\omega + D_0(k_0)|Q|^2} \right],$$

где $D_0(k_0)$ – коэффициент диффузии, связанный с изотропным отражением, $\Delta\omega$ – обратное время прохождения пути рассеяния, \dim – размерность образца, L – размер системы, а l – длина свободного пробега. Рассматривая только дальние пути ($\Delta\omega = 0$), получим [1]

$$D(k_0) \cong D_0(k_0) - \frac{dk_{eff}^2 / dk_0^2}{\pi \rho(k_0)} \int_{L^{-1}}^{l^{-1}} \frac{dQ}{(2\pi)^{\dim}} \frac{1}{|Q|^2}.$$

Воспользовавшись формулой Эйнштейна $\sigma = \frac{e^2}{h} \rho(\omega) D(\omega)$ (где $\rho(\omega)$ – плотность состояний) для проводимости, получим для квантовых систем

$$\sigma(\omega) = \sigma_0(\omega) - \delta\sigma,$$

$$\text{где } \delta\sigma \sim \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{L} \right) & 3D \\ \ln(L/l) & 2D \\ 2(L-l) & 1D \end{cases}$$

Для классических волн получим

$$D(\omega) = D_0(\omega) - \delta D,$$

$$\delta D \sim \begin{cases} \frac{1}{l} - \frac{1}{L} & 3D \\ \ln(L/l) & 2D \\ 2(L-l) & 1D \end{cases}$$

Видно, что в 2D и 3D поправка неограниченно растет, иными словами, коэффициент диффузии перестает удовлетворительно описывать систему. Таким образом, длина, на которой $D(k_0) = 0$ (или в квантовой механике $\sigma = 0$) принимается за длину локализации, выше которой диффузионное распространение не является корректным приближением.

Существенным замечанием к описанию эффекта локализации на основе когерентного обратного рассеяния является неприменимость последнего к системам, содержащим ферриты [1]. Действительно, наличие таких включений в системе нарушает рассуждения об одинаковых путях, и когерентное обратное рассеяние разрушается. Но, как показали численные эксперименты, локализация все равно существует, причем при увеличении необратимости локализация может не ослабляться.

Наиболее известной и разработанной из всех физических теорий одномерной локализации является скейлинг [122, 123 и др]. На данный момент

строгое обоснование скейлинга дано только для дельта-коррелированных процессов (системы бесконечно тонких слоев). При применении скейлинга к исследованию задач локализации в слоистых системах с конечными толщинами слоев возникают сложности [127-129].

Далее в изложении следуем [1]. Рассмотрим $\beta = \frac{d \ln(\alpha)}{d \ln(L)}$, где $\alpha = \delta\omega / \Delta\omega$,

$\delta\omega$ – обратное время прохождения сигнала через образец, $\Delta\omega$ – расстояние между соседними уровнями. Необходимо отметить, что $\delta\omega$ по порядку величины совпадает со сдвигом уровней энергии при изменении граничных условий (хотя это справедливо не для любых изменений граничных условий, но при замене периодических на антипериодические это так), таким образом, α есть мера зависимости решений от граничных условий. В терминах β скейлинговая гипотеза утверждает, что β есть функция только α и L . Эта гипотеза автоматически выполняется, если α есть функция только L , то есть $\beta = f[\alpha(L), L]$. Поскольку L можно выразить в терминах α , то из скейлинговой гипотезы непосредственно следует, что влияние увеличения или уменьшения рандомизации может быть полностью компенсировано изменением толщины системы. Для классических волн в 1D эта гипотеза приводит к тому, что

$$\gamma(k_0) = \frac{1}{L_{loc}(k_0)} \sim k_0^2.$$

В последнее время, с появлением возможности численного моделирования, участилась критика скейлинговой теории локализации [128, 129 и др.]. Действительно, численное моделирование показывает, что при больших частотах длина локализации, как правило, выходит на константу, отличную от нуля [124]. Численным моделированием также показано [127], что дисперсия распределения обратной длины локализации $\text{var}(\gamma)$ зависит от многих параметров, а именно: от разницы импедансов слоев, отношения толщин слоев и от дисперсии распределения толщин слоев. Аналитические результаты также свидетельствуют, что при малых частотах длина локализации пропорциональна квадрату частоты, а

при больших частотах (при большой дисперсии параметров), как правило, выходит на константу [124].

Отличие от скейлинга дают также расчеты сред, периодичных в среднем. Действительно, рассмотрим одномерный кристалл: он представляет собой периодическую последовательность слоев. Теперь будем считать, что параметры слоев случайно распределены в узком интервале относительно их предыдущих, периодических значений. Такая среда уже не является строго периодичной, тем не менее, при малых дисперсиях параметров она сохраняет некоторые свойства периодической среды. Например, длина локализации в области, где для кристалла была запрещенная зона, аномально мала [130-131]. Тем самым, в отличие от предсказаний скейлинга, длина локализации ведет себя немонотонно с увеличением частоты.

Более радикальное отличие от скейлинга дает рассмотрение следующей среды. Сделаем слоистую систему из двух материалов. Из первого материала изготовим слои фиксированной толщины, а из второго – случайной [1]. Чередую слои из первого и второго материала, мы получим случайную систему. В такой системе на частотах прозрачности компонента из первого материала, не будет вообще никакой локализации, так как в этом случае T -матрица первого компонента будет равна единичной, и T -матрица всего образца будет равна произведению T -матриц второго компонента. Тем самым, весь образец будет эквивалентен однородному куску из второго материала. Отсутствие локализации на этих частотах означает, что длина локализации стремится к бесконечности. Множество таких частот ничем не ограничено, следовательно, существуют сколь угодно большие частоты, на которых длина локализации равна бесконечности.

Сравнительно недавно была произведена попытка реанимировать скейлинговую теорию в несколько измененном виде [122, 123 и др.]. Основой для этого послужила гипотеза, что $\sigma_\gamma = \frac{\gamma}{2L}$, где σ_γ – дисперсия γ . Оказывается, что эта зависимость неплохо выполняется для многих случайных процессов. Тем не менее, для периодичных в среднем сред оказалось, что в области аномально

большой γ дисперсия аномально мала. Справедливости ради необходимо отметить, что в этой области аномально мала плотность состояний (но все же может быть отлична от нуля). По этой причине можно утверждать, что практически все собственные состояния в системе подчиняются выражению $\sigma_\gamma = \frac{\gamma}{2L}$, что делает этот подход более-менее пригодным в квантовой механике.

Недостатками такого подхода являются три факта. Во-первых, $\sigma_\gamma = \frac{\gamma}{2L}$ является лишь приближением, даже на тех частотах (или в квантовой механике энергиях), когда есть большая плотность состояний. Во-вторых, это равенство не справедливо для периодичных в среднем систем в области малых плотностей состояний. В-третьих, эта гипотеза на данный момент не имеет строгого доказательства, более того, заведомо есть примеры, когда она не работает [127].

Все сказанное говорит о неприменимости скейлинга либо в области длин волн сравнимых с размерами неоднородности, либо в области с небольшой плотностью состояний.

Как уже отмечалось, есть несколько феноменологических теорий, описывающих локализацию; одной из таких теория является метод рандомизации фазы [96, 97]. Например, рассмотрим задачу о распространении тока в проводе, состоящем из частей со случайными проводимостями, к которому подключен внешний источник переменного тока. В j -ой части решением является сумма двух токов, распространяющихся в противоположных направлениях с амплитудами A_j и B_j . При переходе от одного сегмента к другому амплитуды связаны Т-матрицей:

$$\begin{pmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{pmatrix} = T_j \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix}.$$

При этом амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волны связаны соотношением

$$M_n \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ где } M_n = T_n T_{n-1} \dots T_1.$$

Поскольку детерминант Т-матрицы равен 1, то она может быть представлена в виде

$$T_j = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\rho_j} e^{-i\mu_j} & \sqrt{\rho_j} e^{-iv_j} \\ \sqrt{\rho_j} e^{-iv_j} & \sqrt{1+\rho_j} e^{i\mu_j} \end{pmatrix}, \text{ соответственно, } M_n = \begin{pmatrix} \sqrt{1+z_j} e^{-i\theta_j} & \sqrt{z_j} e^{-i\phi_j} \\ \sqrt{z_j} e^{-i\phi_j} & \sqrt{1+z_j} e^{i\theta_j} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим добавление одного слоя, тогда получим рекурсивные соотношения:

$$\ln(1+z_n) = \ln(1+z_{n-1}) + \ln(1+\rho_n) + \ln(1+t_n^2 + 2t_n \cos \varepsilon_n)^{13},$$

где $t_n = s_n r_{n-1}$, $s_n = \sqrt{\rho_n / (1+\rho_n)}$, $r_n = \sqrt{z_n / (1+z_n)}$, $\varepsilon_n = \theta_n - \phi_n + \mu_{n-1} + \nu_{n-1}$.

В пределе $n \rightarrow \infty$ получим $\ln(1+z_n) = n(\alpha_1 + \alpha_2)$, где

$$\alpha_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1+\rho_i) = \langle \ln(1+\rho) \rangle \quad \alpha_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1+t_n^2 + 2t_n \cos \varepsilon_n). \quad \text{Далее введем}$$

гипотезу о том, что ε_n – случайная величина, распределенная равномерно, и поскольку z_n растет, то можно положить $r_n = 1$ (начиная с какого то n). И,

следовательно, $\alpha_2 = \langle \ln(1+s^2 + 2s \cos \varepsilon) \rangle$, но поскольку фаза

$\varepsilon_n = \theta_n - \phi_n + \mu_{n-1} + \nu_{n-1}$ – случайная (и по предположению независимая) величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$, то $\alpha_2 = 0$

$\alpha_2 = \langle \ln(1+s^2) \rangle = \langle \ln(1+\rho/(1+\rho)) \rangle$. Теперь, зная распределение ρ_i , можно найти

обратную длину локализации $L_{loc} = -L / \langle \ln T \rangle$;

$$\alpha = \langle \ln(1+\rho) \rangle + \langle \ln(1+\rho/(1+\rho)) \rangle = \langle \ln(1+2\rho) \rangle$$

По существу, данный метод заключается в том, чтобы ренормировать Т-матрицу; на самом деле, ренормировать лишь один из элементов, который есть

¹³ $r_n \exp(i(\varepsilon_{n+1} - \delta_{n+1})) = \frac{s_n + r_{n-1} \exp(i\varepsilon_n)}{1 + s_n r_{n-1} \exp(i\varepsilon_n)}$, $\varepsilon_n = \theta_n - \phi_n + \mu_{n-1} + \nu_{n-1}$, $\delta_n = \theta_n - \phi_n + \theta_{n-1} + \phi_{n-1}$

не что иное, как $\frac{1}{T} = \frac{e^{-i\varphi}}{|T|}$, где φ – фаза коэффициента прохождения. Следующим этапом является необоснованное введение гипотезы о том, что φ – случайная величина, не зависящая ни от каких других величин и равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$. Фаза φ действительно распределена равномерно в интервале $[-\pi, \pi]$, но она не является независимой величиной. Фаза зависит от полного оптического пути, и в случае конечно-компонентной смеси это принципиально. В частности, из этого метода расчета невозможно получить то, что для двухкомпонентной системы существуют частоты, при которых локализация отсутствует.

По существу метод стохастизации фазы – это лишь модернизация формулы (73). Этот метод дает неплохие результаты при расчете длины локализации бесконечно-компонентной смеси, но является неприемлемым при расчете конечно-компонентной смеси. В этом методе теряется отсутствие высокочастотного предела в некоторых случайных процессах $\lim_{k_0 \rightarrow \infty} L_{loc}(k_0)$.

Были предприняты попытки введения эргодической гипотезы при исследовании локализации. Авторы [119] преобразуют волновое уравнение к виду, содержащему усредненные по объему величины. Пользуясь эргодической гипотезой, усреднение по объему приравнивают к усреднению по ансамблю. Необходимо отметить, что эргодическая гипотеза применима только к равновесным термодинамическим системам, в которых характерные величины распределены по Максвеллу. Наиболее распространенной ошибкой является применение эргодической гипотезы к величинам, имеющим негауссово распределение. Например, численные эксперименты показали (в частности, в главе 1 был приведен расчет среднего поля для системы $\varepsilon = \mu$; несмотря на конечную длину спада поля длина локализации в такой системе равна

бесконечности), что при высоких частотах¹⁴ усредненное по ансамблю поле экспоненциально спадает на масштабе меньшем, чем длина локализации. Хотя на любой реализации характерный масштаб спада поля – длина локализации. Кроме того, средняя по ансамблю интенсивность является константой, а высшие моменты неограниченно возрастают [115].

Рассмотрим использование эргодической гипотезы, следуя Пин Шенгу [124]. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & \rho(z) \\ -K^{-1}(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Для того, чтобы получить уравнения одномерной электродинамики можно сделать замену $p \rightarrow E; u \rightarrow iH; \rho \rightarrow \mu; -K^{-1} \rightarrow \varepsilon$.

Уравнение (75) содержит чисто действительные функции ρ и $-K^{-1}$ (предполагается среда без поглощения), и решения будут искаться чисто действительные. Поскольку интересна экспоненциальная асимптотика с действительным показателем, то не принципиально, какие решения искать – действительные или комплексные. Уравнение (75) имеет два независимых решения. Поскольку след матрицы равен 0, и одно решение экспоненциально убывает, то второе решение будет экспоненциально расти с тем же показателем. В дальнейшем будет рассматриваться именно возрастающее решение. Необходимо отметить, что уже на этом этапе без доказательства вбрасывается существование локализации.

Перейдя в полярные координаты $p = r \cos(\varphi), u = r \sin(\varphi)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dz} &= -\omega \left(\rho(z) \sin^2(\varphi) + K^{-1}(z) \cos^2(\varphi) \right), \\ \frac{dr}{dz} &= \left(\frac{r\omega}{2} \right) \sin(2\varphi) \left(\rho(z) - K^{-1}(z) \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

¹⁴ Когда $k_0 d \ll 1$, где $k_0 = \frac{\omega}{c}$, а d – характерный размер неоднородности.

$$\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \frac{\omega}{2} \int_0^z \sin(2\varphi) \{ \rho(\xi_1(z)) - K^{-1}(\xi_2(z)) \} dz.$$

Поскольку ожидается, что $\ln(r) = \text{const} + \gamma z$, получим

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln(r)}{z} = \gamma = \frac{\omega}{2} \left[\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \int_0^z \sin(2\varphi) \{ \rho(\xi_1(z)) - K^{-1}(\xi_2(z)) \} dz \right].$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, является средним по объему. Далее предположив, что для данной величины справедлива эргодическая гипотеза, получим

$$\gamma = \frac{\omega}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} d\xi_1 d\xi_2 P(\varphi, \xi_1, \xi_2) \sin(2\varphi) \{ \rho(\xi_1) - K^{-1}(\xi_2) \} dz,$$

где (φ, ξ_1, ξ_2) представляет собой марковский процесс, и функция распределения $P(\varphi, \xi_1, \xi_2)$ удовлетворяет уравнению Фокера-Планка.

Такой подход позволяет установить поведение длины локализации на малых частотах $L_{loc}(k_0) \sim k_0^2$. На больших частотах этот метод вычисления длины локализации дает выход на константу – высокочастотный предел длины локализации (величина которого совпадает с предсказанием теоремы Джоноса-Хуберда-Таулесса). Таким образом, предлагается качественная форма зависимости длины локализации от частоты $L_{loc}(k_0) = \frac{C_1}{k_0^2} + C_2$, которая будет использована впоследствии.

Несмотря на то, что применение эргодической гипотезы ничем не обосновано, результаты расчета качественно согласуются с численным моделированием для многих случайных процессов. Однако есть примеры (например, двухкомпонентная смесь), когда поведение на высоких частотах отличается от выхода на константу.

Тщательное изучение одномерных систем показало существенное отличие систем с непрерывным распределением параметров в пространстве и систем, в

которых зависимость параметров от координат может иметь ступенчатый вид [124].

Теорема Джоноса-Хуберда-Таулесса указывает на то, что в системах с резкими границами (например, в смеси однородных слоев конечной толщины), при увеличении частоты длина локализации стремится к константе. Точнее говоря, теорема Джоноса-Хуберда-Таулесса предсказывает величину этого предела, предполагая его существование.

Несмотря на то, что вопрос существования высокочастотного предела не исследован, принято считать, что “существует две возможности, когда $k_0 \rightarrow \infty$: $\gamma(k_0)$ выходит на константу или уменьшается до нуля [1].

Особенности локализации света при падении электромагнитной волны под углом к слоям системы

В данном разделе рассмотрена локализация в слоистой системе, состоящей из магнито-диэлектрических слоев. Отдельное внимание уделено случаю, когда явление Брюстера наблюдается для обеих поляризаций.

Явление Брюстера в магнито-диэлектриках. Рассмотрим подробнее падение плоской волны из вакуума под углом α на слоистую структуру. Для заданной поляризации (s- или p-) задача о падении под углом может быть сведена к задаче о падении по нормали. Действительно, для случая нормального падения (например, вдоль оси z , см. рисунок 61) уравнения Максвелла в j -ом слое сводятся к волновому уравнению с постоянными коэффициентами $\Delta F + k_0^2 n_j^2 F = 0$ ($F = E, H$), решение которого можно записать в виде:

$$\begin{aligned} E &= A_j e^{ik_0 n_j z} + B_j e^{-ik_0 n_j z} \\ H &= y_j A_j e^{ik_0 n_j z} - y_j B_j e^{-ik_0 n_j z}, \end{aligned} \quad (76)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c}$, $n_j = \sqrt{\epsilon_j \mu_j}$ – показатель преломления j -го слоя, $y_j = \sqrt{\epsilon_j / \mu_j}$ – характеристический адмитанс j -го слоя. Для получения окончательного решения

необходимо удовлетворить граничным условиям, заключающимся в непрерывности тангенциальных составляющих полей.

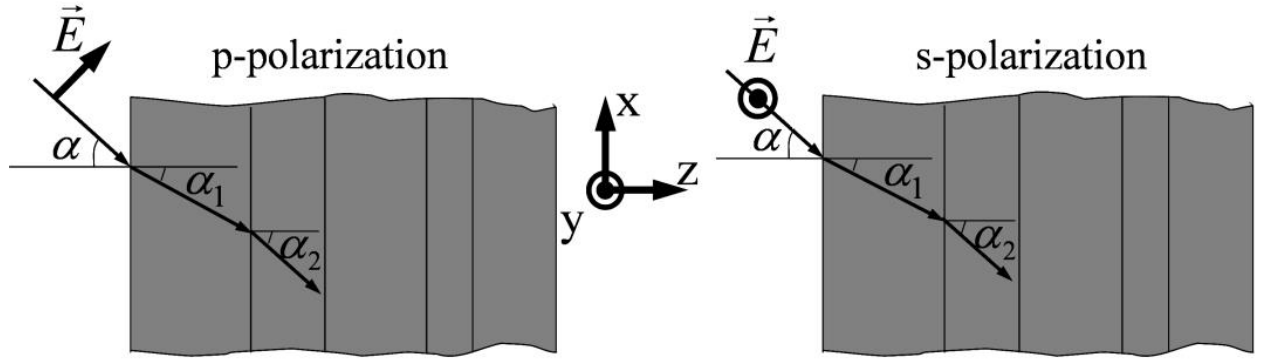


Рисунок 61 – Падение s- и p-поляризованных волн на слоистую систему.

Оказывается, что при падении волны под углом (см. рисунок 61) можно получить систему уравнений только на тангенциальные компоненты полей. Каждая из компонент будет удовлетворять волновому уравнению $\Delta F + k_0^2 \varepsilon_j \mu_j \cos^2 \alpha_j F = 0$ (здесь α_j – угол распространения в j -том слое), а решение запишется в виде (76) (появится лишь дополнительный несущественный множитель $e^{ik_{\parallel}x}$, который далее опустим, k_{\parallel} – тангенциальная составляющая волнового вектора), с тем отличием, что характеристические адмитансы y_j нужно заменить на «поверхностные» с учетом поляризации [132]:

$$(Y_j)_s = \frac{H_{\parallel}}{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} \frac{k_{zj}}{k_j} = \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} \cos \alpha_j, \quad (77a)$$

$$(Y_j)_p = \frac{H}{E_{\parallel}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} \frac{k_j}{k_{zj}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} \frac{1}{\cos \alpha_j}, \quad (77b)$$

а показатель преломления – на

$$(n_j)_s = (n_j)_p = \sqrt{\varepsilon_j \mu_j} \cos \alpha_j. \quad (77c)$$

Отметим, что, в отличие от падения по нормали, поверхностный адмитанс вакуумного слоя Y_v не равен единице и различен для s- и p-поляризаций:

$$(Y_v)_s = \cos \alpha, \quad (Y_v)_p = 1/\cos \alpha. \quad (77d)$$

В случае нормального падения ($\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$) поля имеют только тангенциальные компоненты, а поверхностный импеданс совпадает с характеристическим.

Уравнение для нахождения угла Брюстера

$$\frac{k_{\parallel}}{\sqrt{\varepsilon_1 k_0^2 - k_{\parallel}^2}} = \tan(\alpha) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

можно переписать как равенство поверхностных адмитансов р-поляризованной волны для соседних слоев:

$$(Y_1(\alpha))_p = (Y_2(\alpha))_p.$$

Из равенства адмитансов слов для р-поляризованной волны следует, что в двухкомпонентной смеси для р-поляризованного света наблюдается делокализация: свет распространяется без отражений от границ слоев. При этом для s-поляризованной волны никакие значения угла падения не приводят к равенству адмитансов:

$$(Y_1)_s = \sqrt{\varepsilon_1 - \left(\frac{k_{\parallel}}{k_0}\right)^2} \neq \sqrt{\varepsilon_2 - \left(\frac{k_{\parallel}}{k_0}\right)^2} = (Y_2)_s.$$

Это неравенство выражает известный факт, что в немагнитных диэлектриках угол Брюстера существует только для р-поляризованного света. Однако если мы рассмотрим магнитные материалы ($\mu_j \neq 1$), то функциональная зависимость адмитанса от k_{\parallel} усложняется, и оказывается, что угол Брюстера может существовать как для р-, так и для s-поляризованного света [133]. На границе раздела двух сред с проницаемостями ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2 выражения для углов Брюстера будут определяться из систем:

Для s-поляризации:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 \\ \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \alpha_1 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sin \alpha_2 \end{cases}$$

Для р-поляризации:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \frac{1}{\cos \alpha_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{1}{\cos \alpha_2} \\ \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \alpha_1 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sin \alpha_2 \end{cases} \quad (78)$$

В частности, когда характеристический адмитанс всех слоев одинаков, угол Брюстера совпадает с нормалью ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) и реализуется для всех поляризаций сразу.

Распространение электромагнитных волн в случайной магнито-диэлектрической слоистой системе. Для описания распространения волн в слоистой среде был использован метод Т-матриц. Введем между каждыми двумя слоями слой вакуума нулевой толщины. Т-матрица такого слоя равна единичной, так что Т-матрица всей системы не изменится. Это позволяет ввести независимую Т-матрицу каждого слоя [134]:

$$\mathbf{T}_j = \begin{pmatrix} \cos \rho_j + \frac{i}{2} \left(\frac{Y_v}{Y_j} + \frac{Y_j}{Y_v} \right) \sin \rho_j & -\frac{i}{2} \left(\frac{Y_v}{Y_j} - \frac{Y_j}{Y_v} \right) \sin \rho_j \\ \frac{i}{2} \left(\frac{Y_v}{Y_j} - \frac{Y_j}{Y_v} \right) \sin \rho_j & \cos \rho_j - \frac{i}{2} \left(\frac{Y_v}{Y_j} + \frac{Y_j}{Y_v} \right) \sin \rho_j \end{pmatrix},$$

где $\rho_j = k_0 n_j d_j$, d_j – толщина j -го слоя, а выражения для поверхностных адмитансов вакуума Y_v и слоя Y_j берутся из (77a) или (77b) в соответствии с поляризацией.

В случае, когда магнитная проницаемость слоев одинакова, для р-поляризованной волны существует угол делокализации, равный углу Брюстера при переходе из одного слоя в другой (78). При этом для s-поляризованной волны индекс Ляпунова γ возрастает с углом. Последнее связано с ростом контраста поверхностных адмитансов при увеличении угла (см. (77)).

Если диэлектрическая проницаемость слоев одинакова, а магнитная различна, следует ожидать противоположной ситуации: для s-поляризованной волны существует угол делокализации, а для р-поляризованной волны γ лишь возрастает с углом. Угол делокализации в этом случае совпадает с углом Брюстера для s-поляризованной волны в магнитных слоях (78). Действительно, это следует из инвариантности системы уравнений Максвелла относительно перемены местами ϵ и μ , замены E на H , а H на $-E$.

В случае же равных характеристических адмитансов всех слоев угол Брюстера реализуется и для s-поляризованной, и для p-поляризованной волн. При этом угол Брюстера равен нулю (случай нормального падения).

Рассмотрим подробнее локализацию в такой системе. Для падения по нормали ($\alpha = 0$) численный эксперимент (см. рисунок 62) подтверждает очевидное предсказание об отсутствии локализации для обеих поляризаций одновременно:

$$\gamma_s = \gamma_p = 0.$$

При падении под углом индексы Ляпунова для различных поляризаций отличны от нуля. Однако выявился неожиданный факт: с точностью до ошибки эксперимента индексы Ляпунова для s- и p- поляризаций равны:

$$\gamma_s = \gamma_p. \quad (79)$$

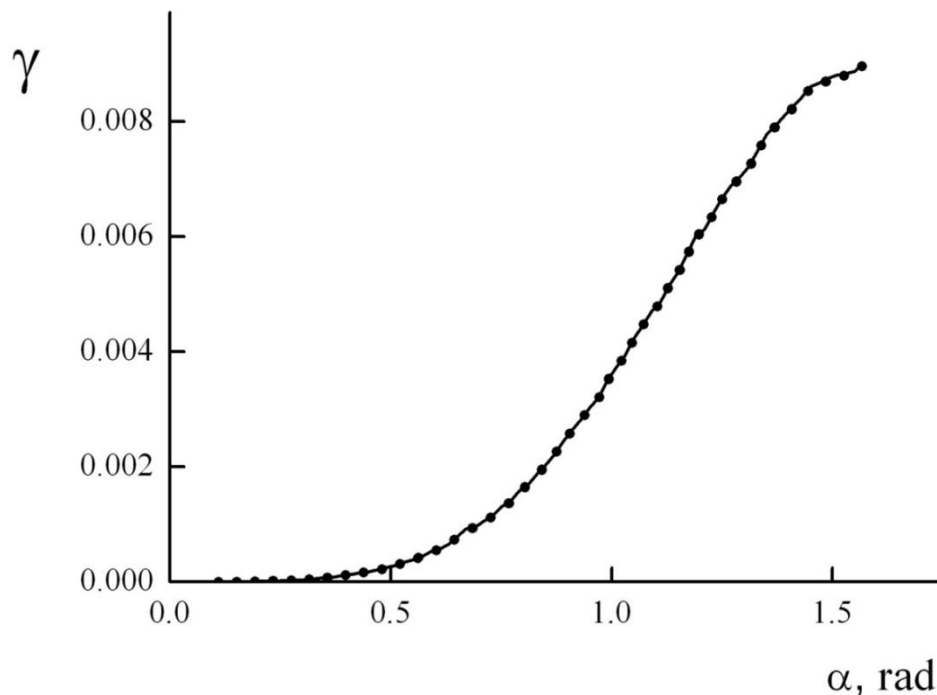


Рисунок 62 – Зависимость γ (нормированного на среднюю толщину слоев d) от угла падения α на двухкомпонентную систему при фиксированной частоте $k_0 d = 1.0$. Проницаемости первого и второго материалов, соответственно, $\varepsilon_1 = 2$, $\mu_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 15$, $\mu_2 = 7.5$. Слои из первого и второго материала случайно перемешаны, и их толщины равномерно распределены в интервале от $0.8d$ до $1.2d$. Сплошная кривая – для s-поляризации, точечная кривая – для p-.

Совпадение индексов Ляпунова для разных поляризаций кажется удивительным, так как в отдельной реализации коэффициенты прохождения для s- и p-поляризованных волн, безусловно, разные (см. рисунок 63).

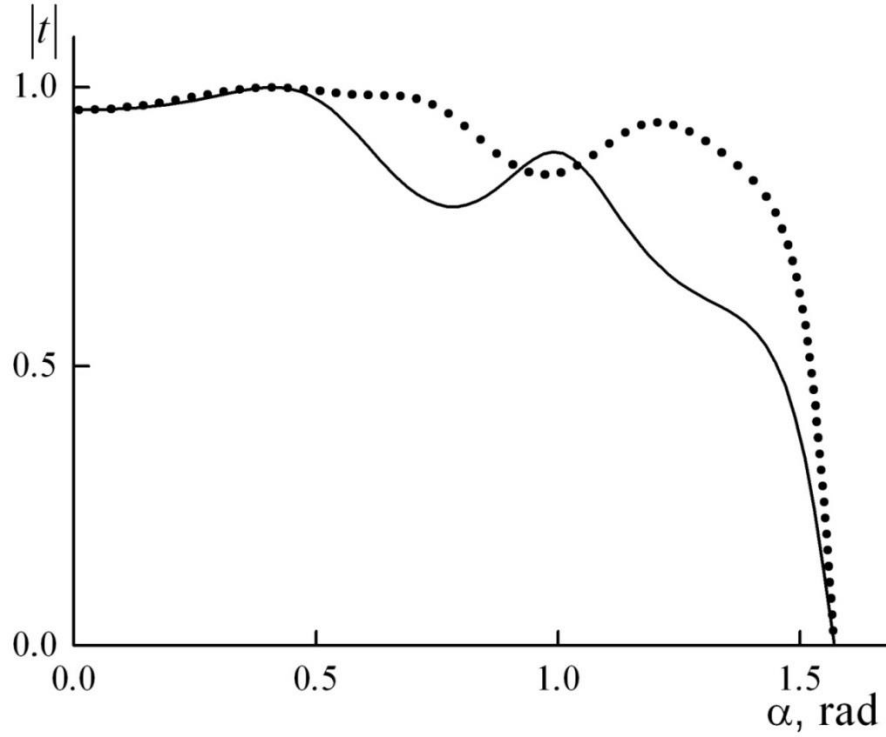


Рисунок 63 – Коэффициент прохождения для s- (сплошная кривая) и p- (точечная кривая) поляризованных волн через систему из 30 слоев как функция угла падения из вакуума. Параметры системы как на рисунке 62.

Рассмотрим подробнее это явление. Т-матрица всей системы:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_N \mathbf{T}_{N-1} \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1, \quad (80)$$

где \mathbf{T}_j – Т-матрица j -го слоя. Будем использовать представление Т-матрицы в виде

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{B}_j \mathbf{A}_j \mathbf{B}_j^{-1},$$

где матрица \mathbf{A}_j зависит от поляризации только через $\cos \alpha_j$, а \mathbf{B}_j – только через $Y_v(\alpha)$.

Например, для s-поляризованной волны

$$\mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} \cos \rho_j + \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha_j} + \cos \alpha_j \right) \sin \rho_j & \frac{i}{2} \left(\cos \alpha_j - \frac{1}{\cos \alpha_j} \right) \sin \rho_j \\ \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha_j} - \cos \alpha_j \right) \sin \rho_j & \cos \rho_j - \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha_j} + \cos \alpha_j \right) \sin \rho_j \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} Y_v + \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} & Y_v - \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} \\ Y_v - \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} & Y_v + \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} \end{pmatrix}.$$

Так как характеристические адмитансы всех слоев одинаковы, то \mathbf{B}_j не зависит от j , но зависит от поляризации. В этом случае соотношение (80) можно переписать в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{B} \mathbf{A}_N \mathbf{A}_{N-1} \dots \mathbf{A}_1 \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}. \quad (81)$$

Т.к. матрица \mathbf{B} конечна и не зависит от толщины или реализации случайной системы, то длина локализации будет определяться только матрицей \mathbf{A} .

Матрицы \mathbf{A}_j имеют вид Т-матриц при падении по нормали из вакуума на слои с оптическими толщинами ρ_j и адмитансами слоев $\cos \alpha_j$. Таким образом, для s-поляризованной волны можно перейти от рассмотрения задачи падения под углом к модельной задаче падения по нормали на слои с адмитансами $\cos \alpha_j$.

Аналогично для р-поляризованной волны можно перейти от задачи падения под углом к модельной задаче падения по нормали. Единственное отличие: в соответствии с (77b) роль адмитансов будут играть не $\cos \alpha_j$, а $1/\cos \alpha_j$.

Заметим, что при падении по нормали, если поменять местами ε и μ , то коэффициент прохождения через любую систему не изменится. Действительно в этом случае в уравнениях Максвелла поля E заменяются на H , а H на $-E$. Следовательно, при замене Y на $1/Y$ коэффициент прохождения не меняется. Поэтому в данных модельных системах коэффициент прохождения одинаков и

длина локализации одинакова. Таким образом, длина локализации одинакова для s- и p-поляризованных волн.

Отметим, что хотя коэффициент прохождения в модельных системах одинаков, коэффициенты отражения для двух модельных систем отличаются знаками. Таким образом, матрицы **A** для разных поляризаций различны. Кроме того, матрицы **B** для s- и p-поляризованных волн также различны, поэтому коэффициенты прохождения через исходную систему для s- и p-поляризованных волн при падении под углом в общем случае также оказываются разными (см. рисунок 63), что не мешает равенству длин локализации. В заключение данного параграфа можно отметить, что в недавно вышедшей работе [135], посвященной локализации в слоистой системе, содержащей метаматериалы, приведена формула Израилева-Макарова [90], модифицированная для случая падения под углом. Данная формула дает аналитическое выражение для длины локализации в случае двухкомпонентной системы и справедлива для слабонеупорядоченных систем. Результаты находятся в согласии с модифицированной формулой Израилева-Макарова, но справедливы также и в случае сильно неупорядоченных систем, для которых формула Израилева-Макарова, в общем случае, неверна.

Стохастизация поляризации электромагнитной волны в случайно-анизотропной системе

При всей схожести волновых явлений в разных областях физики, между электродинамикой и квантовой механикой есть принципиальное различие: основной объект квантовой теории – волновая функция – является скалярной величиной, в то время как электрическое и магнитное поля являются векторными величинами. В некоторых случаях это не играет важной роли, например, для одномерной системы изотропных слоев, векторная задача всегда может быть сведена к скалярной, которая с точностью до замены обозначений идентична квантово-механической. Однако при рассеянии на двумерных и трехмерных

объектах или слоях из анизотропных материалов необходимо учитывать векторную природу электромагнитных волн.

Оказывается, что наличие поляризации может привести к существенным особенностям. Например, в одномерных фотонных кристаллах из анизотропных компонентов (благодаря смещению блоховских волн разной поляризации) могут образовываться запрещенные зоны особого типа [6, 16 и др.]. Поскольку прохождение света по случайной системе, в частности, локализация света непосредственно связана с образованием случайных брэгговских отражателей [7], возникает вопрос: как проявляются векторная природа электромагнитных волн при их распространении в случайных системах?

Простейшим объектом для изучения поляризационных явлений в неупорядоченных средах является одномерная случайная система анизотропных слоев, сделанных из одноосного кристалла без поглощения. Все слои абсолютно одинаковы, единственное, что их отличает, – ориентации оптических осей (см. рисунок 64), которые разбросаны случайно в плоскости, параллельной слоям. Будем считать углы поворота оптических осей α равномерно распределенными в небольшом интервале. Иными словами, в отсутствие этого ориентационного беспорядка система представляет собой однородный анизотропный одноосный материал.

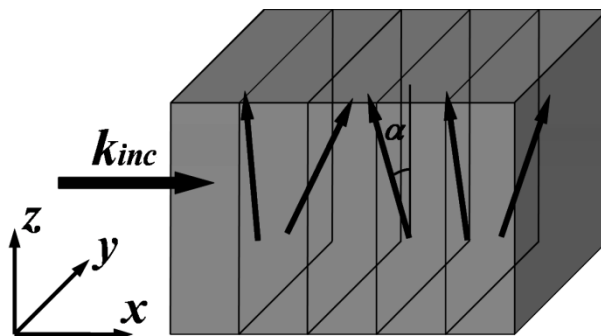


Рисунок 64 – Схема изучаемой случайной системы оптически одноосных слоев.

Ориентации оптических осей (в плоскости слоев yz) показаны стрелками внутри

слоев. Угол α поворота оптической оси слоя отсчитывается от оси z . \vec{k}_{inc} –

волновой вектор падающей на изучаемую систему волны.

Рассмотрим изменение поляризации волны при распространении по такой системе. Поскольку интересны объемные (локализация), а не поверхностные эффекты, исключим резонансы Фабри-Перо, возникающие за счет отражения на внешних границах случайной системы и вакуума. Для этого поместим исследуемую систему в однородный анизотропный материал¹⁵, соответствующий системе без ориентационного беспорядка. Рассмотрим падение по нормали линейно-поляризованной волны.

Пройдя два анизотропных слоя с неколлинеарными оптическими осями, линейно поляризованная волна (за счет разности оптических путей для обыкновенной и необыкновенной волн) в общем случае станет эллиптически поляризованной. Поляризацию такой волны принято характеризовать ориентацией главных осей эллипса поляризации. Обозначим θ угол, который более длинная главная ось эллипса поляризации составляет с вертикальной осью z (см. систему координат на рисунке 64).

При фиксированном количестве слоев N и фиксированной поляризации падающей волны (линейно поляризованной вдоль z или вдоль y), каждая отдельная реализация случайной системы даст свой угол θ поляризации прошедшей волны. Углы поворота главных осей эллипса поляризации прошедшей волны определяются по амплитудным коэффициентам прохождения t_y и t_z (которые равны, соответственно, амплитудам y и z поляризованных компонент прошедшей волны при единичной амплитуде падающей волны) с помощью формулы [43]

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{2|t_y||t_z|}{|t_y|^2 - |t_z|^2} \cos(\text{Arg}(t_y) - \text{Arg}(t_z)) \right] + \frac{\pi m}{2},$$

где m – целое число.

Для определения искомого угла θ число m подбирается так, чтобы $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ и

под данным углом располагалась главная (большая по длине) ось эллипса.

¹⁵ Заключение во внешнюю анизотропную среду не является принципиальным и не сказывается на наблюдаемом явлении, однако позволяет исключить «паразитные» эффекты и значительно облегчает изложение.

Таким образом, для фиксированного количества слоев и фиксированной поляризации падающей волны можно построить функцию распределения $f_N(\theta)$ направления большей главной оси эллипса поляризации прошедшей волны. Эта функция распределения для разных толщин и разных поляризаций падающей волны представлена на рисунке 65.

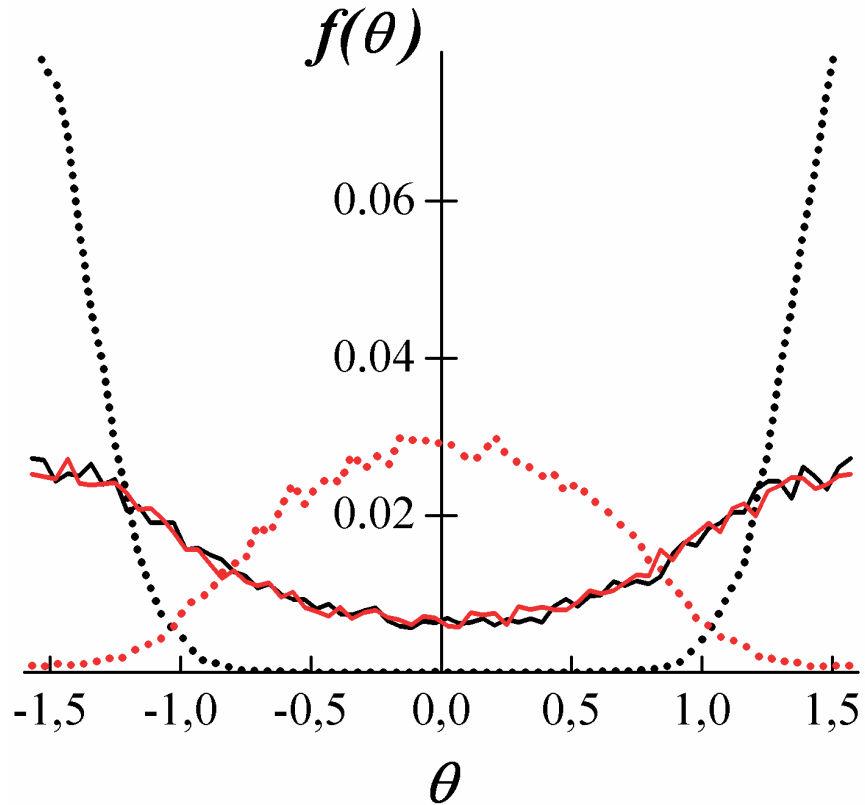


Рисунок 65 – Функции распределения $f(\theta)$ угла поворота большей оси эллипса поляризации прошедшей волны. Угол θ отсчитывается от координатной оси z .

Точечные кривые – для случайной системы с 10 слоями, сплошные – для случайной системы с 160 слоями. Черные кривые – при падающей на случайную систему y -поляризованной волне, красные – при падающей z -поляризованной волне. Обыкновенная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_o = 2$, необыкновенная – $\varepsilon_e = 11$. Частота $k_0 d = 0.5$ (d – толщины слоев), углы α поворота оптических осей слоев (отсчитываемые относительно оси z) равномерно распределены в интервале от -0.25 rad до 0.25 rad.

При небольших толщинах (точечные кривые) есть два максимума: около $\theta = 0$ для падающей волны, поляризованной вдоль z , и $\theta = \pi/2$ (или, что то же самое, $\theta = -\pi/2$) для волны, поляризованной вдоль y . Таким образом, при небольших толщинах функция распределения размывается, но еще сохраняет «память» об изначальной поляризации.

При увеличении толщины (непрерывные кривые) функции распределения становятся одинаковыми, то есть это означает, что вероятность найти определенную поляризацию вышедшей волны не зависит от того, как поляризована падающая волна – вдоль z или вдоль y .

Для оценки скорости «забывания» изначальной поляризации рассмотрим, как зависит мера¹⁶ μ разницы функций распределения от количества N слоев в системе

$$\mu(N) = \sqrt{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (f_z(\theta) - f_y(\theta))^2 d\theta},$$

где $f_z(\theta)$ и $f_y(\theta)$ – функции распределения, соответствующие падающим волнам, линейно поляризованным вдоль z и вдоль y .

Численная симуляция показывает (см. рисунок 66), что мера убывает экспоненциально, что позволяет ввести длину L_{stoch} «забывания» (стохастизации) поляризации как прирост толщины системы, влекущий уменьшение функции $\mu(N)$ в e раз. По аналогии с индексом Ляпунова будем использовать обратную длину стохастизации поляризации $\xi = 1/L_{stoch}$.

¹⁶ Используем меру L_2 , но качественно результаты одинаковы и для других способов определения меры.

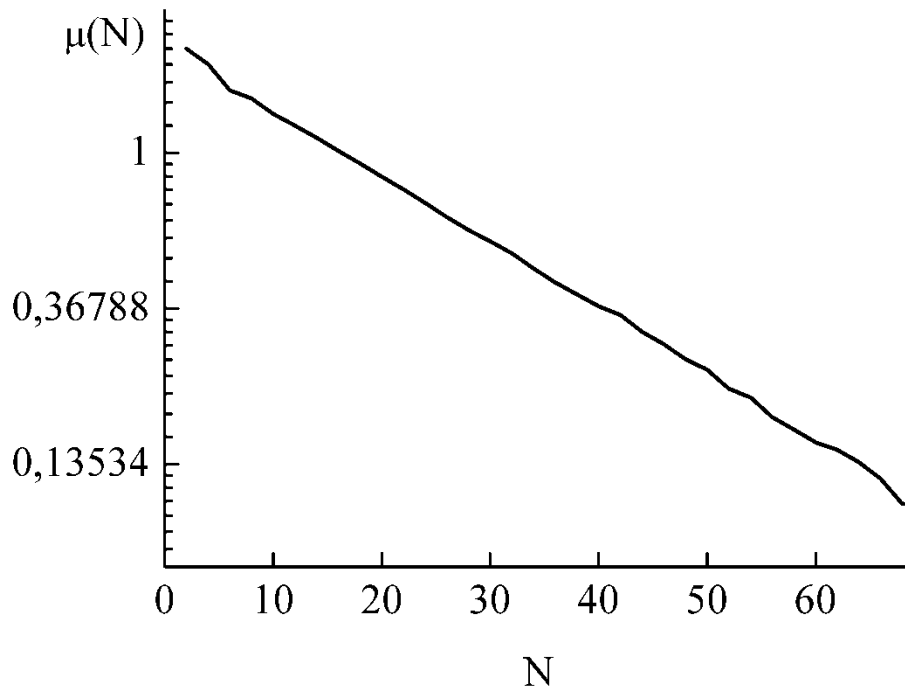


Рисунок 66 – Зависимость величины $\mu(N)$, характеризующей память об исходной поляризации волны после того, как она прошла через случайную систему, от количества N слоев в системе. Обыкновенная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_o = 2$, необыкновенная – $\varepsilon_e = 11$. Частота $k_0 d = 0.5$, углы α поворота оптических осей слоев равномерно распределены в интервале от $-\pi/4$ до $\pi/4$.

Количество независимых масштабов играет важную роль в описании системы. Например, если из физических соображений очевидно, что система описывается одним масштабом, то её можно описывать в рамках скейлинговой теории [12, 122, 123]. В частности, теория скейлинга нашла своё применение при описании одномерных неупорядоченных систем [123]. Поэтому, поскольку в системе уже есть один масштаб обратной длины – индекс Ляпунова γ , – необходимо сравнить ξ с γ .

Отметим, что при нормальном падении система описывается не двумя разными индексами Ляпунова, отвечающими разным поляризациям, а лишь одним, так как благодаря стохастизации поляризации волна «забывает» о своей изначальной поляризации по мере распространения.

Расчет γ проводился по формуле $\gamma = -\frac{\langle \ln t \rangle}{L}$, где L – толщина случайной системы (должна быть большой по сравнению с длиной локализации), где $t = \sqrt{|t_y|^2 + |t_z|^2}$ – модуль амплитудного коэффициента прохождения, он также может быть выражен через векторы Пойнтинга падающей S_i и прошедшей S_t волн. $t = \sqrt{|S_t|/|S_i|}$. Угловые скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по ансамблю реализаций случайной системы.

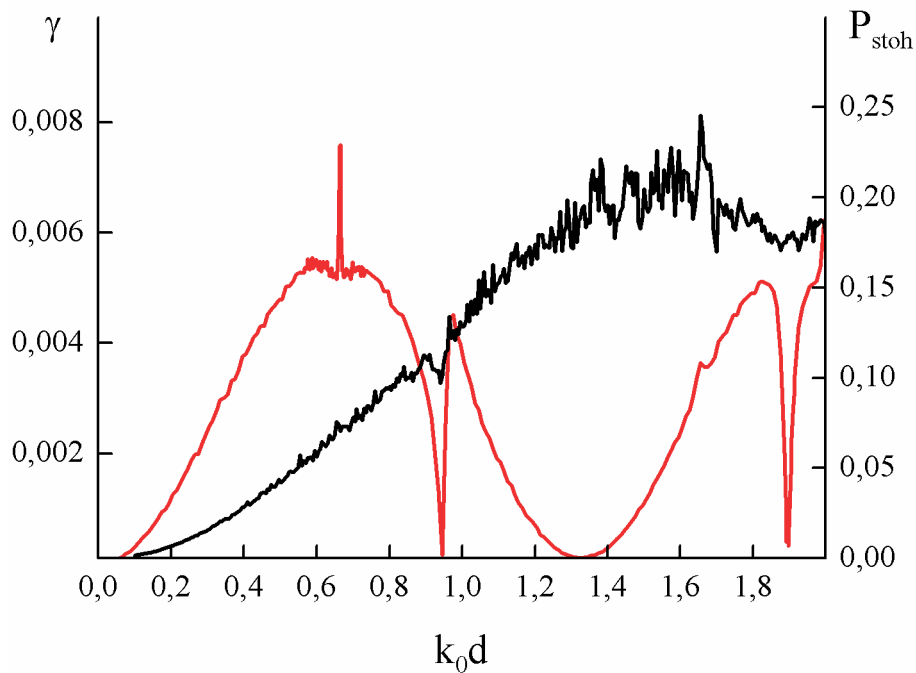


Рисунок 67 – Зависимость обратной длины стохастизации поляризации P_{stoch} (черная кривая, правая шкала) и индекса Ляпунова γ (красная кривая, левая шкала) от частоты $k_0 d$. Обыкновенная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_o = 2$, необыкновенная – $\varepsilon_e = 11$. Углы α поворота оптических осей слоев равномерно распределены в интервале от -0.25 rad до 0.25 rad относительно оси z .

Расчет показывает (см. рисунок 67), что обратная длина стохастизации ξ не только значительно отличается по масштабу от индекса Ляпунова, но и имеет качественно другую частотную зависимость. Обратная длина стохастизации в широком интервале частот монотонно растет, в то время как индекс Ляпунова

испытывает несколько экстремумов. Минимумы индекса Ляпунова соответствуют резонансам Фабри-Перо на отдельных слоях системы. В частности, минимумы на частотах $k_0 d \approx 0.945$ и $k_0 d \approx 1.89$ соответствуют резонансам Фабри-Перо необыкновенно поляризованной компоненты, т.к. условия данного резонанса имеют вид $k_0 d \sqrt{\varepsilon_e} \approx \pi$, $k_0 d \sqrt{\varepsilon_e} \approx 2\pi$ и т.д.. Минимум вблизи частоты $k_0 d \approx 1.33$ соответствует резонансу Фабри-Перо особого типа на отдельном слое, при котором набег фазы волны в одном направлении осуществляется с учетом обыкновенного коэффициента преломления, а в обратном – с учетом необыкновенного (это возможно благодаря рассеянию обыкновенной волны в необыкновенную при отражении от границы слоя). Действительно, условие такого резонанса $k_0 d (\sqrt{\varepsilon_e} + \sqrt{\varepsilon_o}) \approx 2\pi$ дает частоту $k_0 d \approx 1.328$. Обратимся к происхождению пика на частоте $k_0 d \approx 0.664$. Причина возникновения данного пика – брэгговское отражение на каждой паре слоев с разными ориентациями оптических осей [7, 136]. Условие данного брэгговского отражения $k_0 (\sqrt{\varepsilon_e} + \sqrt{\varepsilon_o}) 2d \approx 2\pi$. Ввиду вырожденности системы (все слои – одинаковые) брэгговское отражение данного типа не наблюдается для вдвое большей частоты $k_0 d \approx 1.328$ [6], на которой в результате реализуется минимум индекса Ляпунова, связанный с вышеупомянутым резонансом Фабри-Перо.

Все сказанное позволяет заключить, что длина локализации и длина стохастизации поляризации являются двумя независимыми масштабами, характеризующими свойства случайной системы анизотропных слоев.

В заключение данного раздела можно заметить, что говорить о стохастизации поляризации можно лишь в статистическом смысле, для каждой конкретной реализации конечной толщины поляризация прошедшего света однозначно определена. Однако, именно статистические характеристики (как, например, длина локализации) играют приоритетную роль при описании случайных структур.

Андерсоновская локализация света в периодических в среднем системах на основе анизотропных компонентов.

В работе Макгурна-Марадудина [137] рассмотрена частотная зависимость индекса Ляпунова $\gamma(k_0)$ ($k_0 = \omega/c$) периодической в среднем слоистой среды, компонентами которой являются изотропные слои. В идеальном ФК индекс Ляпунова, роль которого в этом случае играет мнимая часть блоховского волнового вектора $\text{Im}(K_{\text{ВЛ}}(k_0))$, отличен от нуля только на частотах запрещенных зон. В [137] показано, что при внесении небольшого беспорядка в толщины или материальные параметры слоев края запрещенных зон размываются так, что во всей области разрешенных зон появляется ненулевой индекс Ляпунова. При этом на частотах запрещенных зон индекс Ляпунова уменьшается, однако он остается относительно большим, и именно в этих областях $\gamma(k_0)$ достигает максимума, в то время как в разрешенных зонах наблюдаются минимальные значения $\gamma(k_0)$.

Впоследствии работа [137], став классической, породила целое направление в исследовании Андерсоновской локализации света – локализация света в «периодических в среднем» структурах [138-148]. В частности, были исследованы угловая зависимость локализации при падении на структуры из изотропных компонентов [143, 147] и локализация в структурах с анизотропными корреляциями [140-142], однако «периодические в среднем» структуры на основе анизотропных компонентов остались вне рассмотрения.

Данный раздел посвящен исследованию локализации в одномерных слоистых оптических структурах со слоями из оптически анизотропного материала.

Для начала рассмотрим идеальный ФК, период которого состоит из двух анизотропных непоглощающих слоев (см. рисунок 68). В качестве анизотропных материалов рассмотрим одноосные кристаллы, оси анизотропии которых параллельны друг другу и плоскости слоев. Рассмотрим случай падения по нормали к слоям (см. рисунок 68), то есть вдоль оси x .

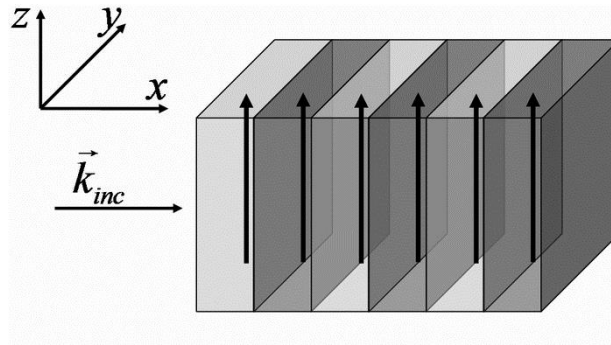


Рисунок 68 – Идеальный ФК. Ориентация оптических осей слоев показана стрелками внутри слоев.

В каждом слое собственными решениями являются линейно поляризованные обыкновенная и необыкновенная волны, при этом на границе слоев граничные условия для обыкновенных и необыкновенных волн разделяются. Следовательно, собственными решениями уравнений Максвелла в данном ФК являются обыкновенные (т.е. поляризованные вдоль оси y) $\mathbf{E}_o = \mathbf{e}_y E_o(x) \exp(iK_o x)$ и необыкновенные (т.е. поляризованные вдоль оси z) $\mathbf{E}_e = \mathbf{e}_z E_e(x) \exp(iK_e x)$ блоховские волны, порожденные соответствующими решениями в анизотропных слоях [6], K_o и K_e – блоховские волновые числа. Каждая из этих блоховских волн является решением независимой подсистемы уравнений Максвелла (соответствующей той или иной поляризации). Вследствие независимости подсистем возможное пересечение дисперсионных кривых этих блоховских волн не ведет к гибридизации волн и, следовательно, к расщеплению дисперсионных кривых в точке их пересечения (см. рисунок 69).

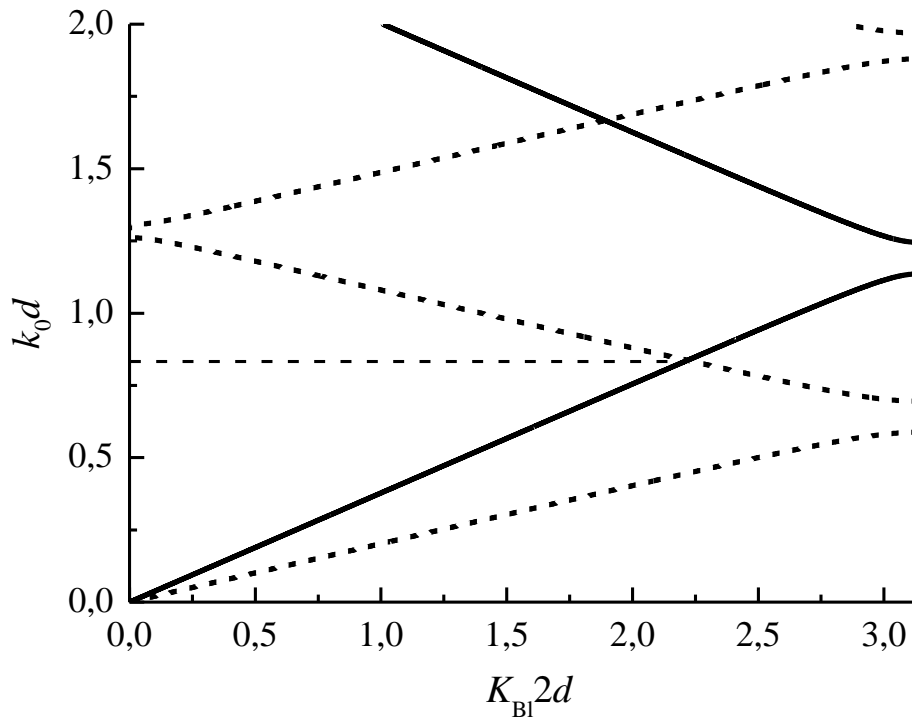


Рисунок 69 – Дисперсионные зависимости рассматриваемого идеального ФК с сонаправленными оптическими осями слоев. Жирная сплошная линия – для обыкновенной волны, жирная пунктирная – для необыкновенной волны, тонкая пунктирная обозначает частоту пересечения дисперсионных ветвей.

Теперь рассмотрим случайное (в среднем нулевое) возмущение каких-либо параметров рассматриваемой системы. Рассматриваемая система описывается несколькими параметрами: толщинами слоев, значениями проницаемостей (в главных осях) и направлениями главных осей анизотропных слоев. Если случайным образом изменить толщины слоев и/или значения диагональных элементов тензоров диэлектрической проницаемости, то все еще имеются две независимые задачи локализации, для двух независимых поляризаций – обыкновенной и необыкновенной волн. Исследование локализации в такой системе сводится к двум независимым задачам, идентичным локализации в периодических в среднем системах с изотропными компонентами, рассмотренной в [137].

Таким образом, интерес представляет рассмотрение беспорядка в ориентациях осей анизотропии (см. рисунок 70). При непараллельности осей

анизотропии граничные условия смешивают обыкновенные и необыкновенные волны. Именно в этом случае возможны эффекты, связанные с взаимодействием различных поляризаций. В случае периодических структур такие взаимодействия наблюдаются преимущественно вблизи частот, соответствующих пересечениям дисперсионных кривых обыкновенной и необыкновенной волн [6]. Именно этим областям частот и будет уделено внимание.

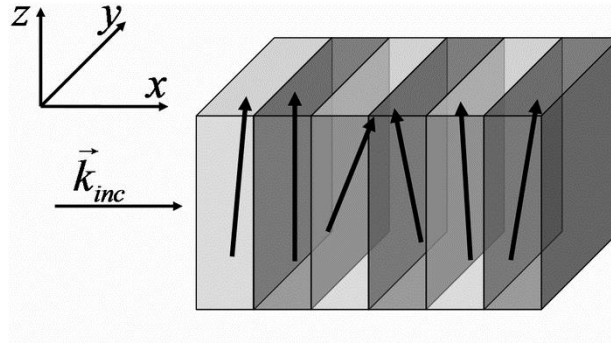


Рисунок 70 – Изучаемая случайная система. Отличается от рисунка 68 случайным разбросом направлений оптических осей слоев.

Далее будем рассматривать систему, отличающуюся от исходного ФК тем, что ориентации оптических осей в различных слоях будут равномерно распределены в плоскости слоев в интервале углов $[-\Delta\alpha, \Delta\alpha]$ относительно оси z (см. рисунок 70).

Исследование локализации в таких системах проводилось в рамках компьютерного эксперимента с использованием метода Т-матриц [149], который позволяет точно рассчитывать электромагнитные поля в одномерных слоистых структурах с однородными слоями.

Длина локализации в случайной системе определяется выражением [1]

$$L_{\text{loc}}^j = 1/\gamma_j = -\lim_{L \rightarrow \infty} \left(L / \langle \ln |t_j| \rangle \right), \quad (82)$$

где j обозначает поляризацию падающей волны (линейную поляризацию электрического поля вдоль z или y), γ_j – индекс Ляпунова для j -й поляризации. За счет рассеяния на границах в волне появляется кросс-поляризованная компонента, так что полный коэффициент прохождения $|t_j|$ падающей с j -й поляризацией волны содержит кросс-поляризованную составляющую

$$|t_j| = \sqrt{|t_{jy}|^2 + |t_{jz}|^2}.$$

Угловые скобки в (82) означают усреднение по ансамблю реализаций случайной системы длины L . Будем рассматривать только y - и z -поляризованные падающие волны.

Рассматривалась двухслойная элементарная ячейка, тензоры диэлектрических проницаемостей слоев в главных осях имели вид:

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.7 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 \end{pmatrix},$$

магнитные проницаемости слоев полагались равными единице, толщины всех слоев выбирались равными d . Случайно задавались лишь углы поворота оптических осей одноосных кристаллов в плоскости слоев. На рисунке 71 показан индекс Ляпунова $\gamma_j d$ (для y - и z -поляризаций падающей на систему волны) как функция частоты $k_0 d$ для системы с разбросом углов поворота оптических осей анизотропных слоев в интервале $[-\Delta\alpha, \Delta\alpha]$ относительно оси z при $\Delta\alpha=0.3$ радиан. Рассмотрен интервал внутри разрешенной зоны исходного ФК вблизи частоты $k_0 d=0.83675$, соответствующей пересечению дисперсионных кривых обыкновенной и необыкновенной волн (см. рисунок 68). Пик наблюдается вблизи этой же частоты $k_0 d$ также и для других углов $\Delta\alpha$ (по крайней мере, от $\Delta\alpha=0.03$ до $\Delta\alpha=0.5$ радиан), увеличиваясь при увеличении $\Delta\alpha$.

Наряду с этим пиком наблюдаются максимумы индекса Ляпунова в запрещенных зонах, что наблюдается также и в «периодических в среднем» системах из изотропных материалов, описанных выше.

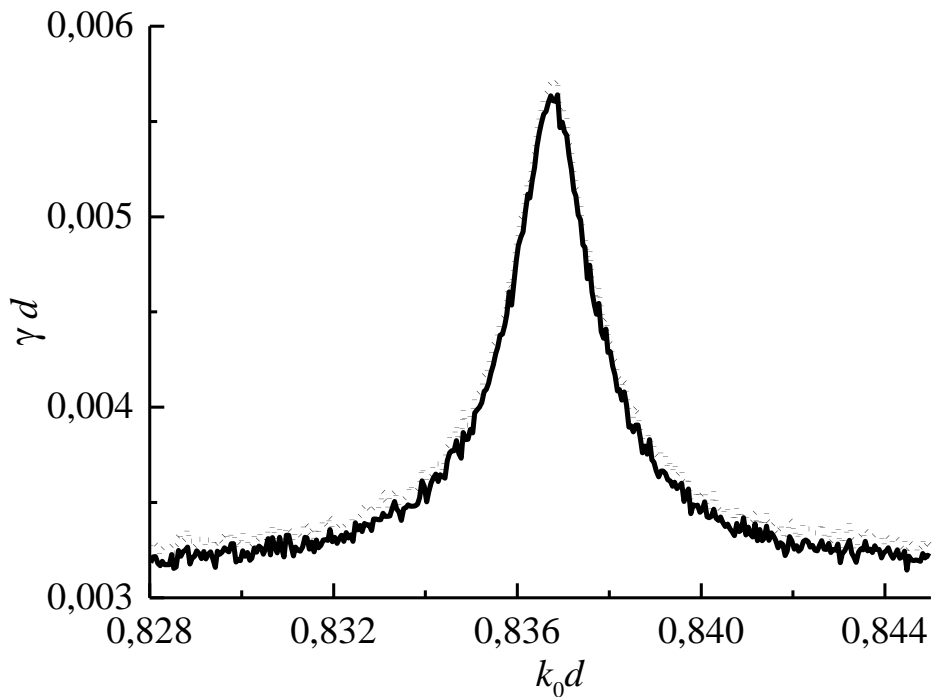


Рисунок 71 – Зависимости $\gamma_y d$ (сплошная кривая) и $\gamma_z d$ (точечная кривая) от $k_0 d$ при $\Delta\alpha=0.3$ рад.

Как видно из рисунка 71, кривые для двух различных поляризаций падающей волны (у- и z-) в области частоты $k_0 d$ практически совпадают. Данное совпадение наблюдается уже для систем с толщинами много меньшими длины локализации, что видно из рисунков 72 и 73, где изображены функции распределения угла поворота большей полуоси эллипса поляризации прошедшей волны. Частота волн соответствует частоте пика $k_0 d$. Сплошные кривые соответствуют падающим волнам, имеющим у-поляризацию, точечные – падающим волнам, имеющим z-поляризацию. Рисунок 72 отвечает системе толщиной в 20 слоев, рисунок 73 – системе толщиной 100 слоев. Параметры слоев системы те же, что и в предыдущих расчетах, представленных в данной статье, $\Delta\alpha=0.3$ радиан.

Видно, что поляризация прошедшей волны в случае тонкой системы (см. рисунок 72) сильно зависит от того, какой была поляризация падающей волны, в то время как поляризация волны, прошедшей через достаточно толстую систему (см. рисунок 73) уже не зависит от поляризации падающей волны.

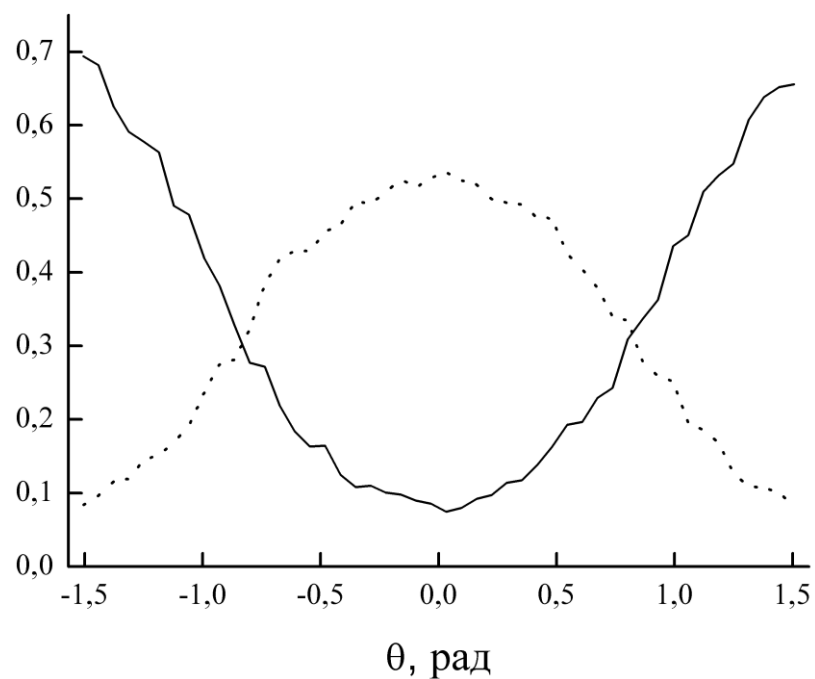


Рисунок 72 – Функция распределения угла поворота большей полуоси эллипса поляризации прошедшей волны. Толщина системы – 20 слоев. Сплошная кривая – для падающей у-поляризованной волны, точечная – для падающей z-поляризованной волны.

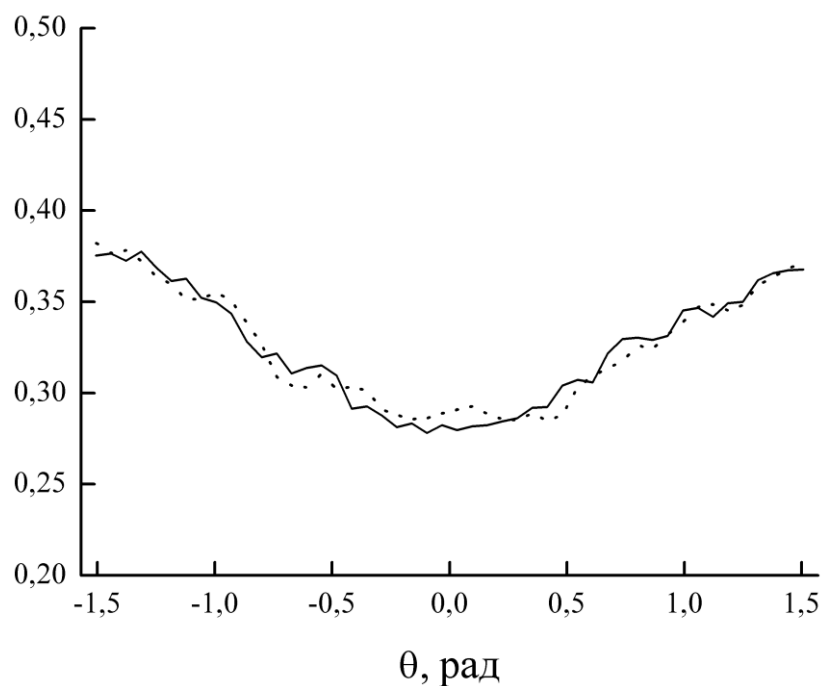


Рисунок 73 – Функция распределения угла поворота большей полуоси эллипса поляризации прошедшей волны. Толщина системы – 100 слоев. Сплошная кривая – для падающей у-поляризованной волны, точечная – для падающей z-поляризованной волны.

Для объяснения наблюдаемого пика индекса Ляпунова рассмотрим формирование резонансного брэгговского отражения в исследуемой системе.

В работе [7] показано, что необходимым условием локализации на некоторой частоте является наличие в случайной системе брэгговских отражателей, т.е. таких участков системы, что образованная из этих участков, взятых в качестве периода, новая периодическая система будет иметь запрещенную зону на этой частоте. Для среды без специально устроенной корреляции слоев наличие брэгговских отражателей является достаточным условием локализации. Специфика систем, слои которых обладают анизотропией, при наличии отклонений в ориентациях оптических осей слоев, проявляется в возможности формирования особого типа брэгговских отражателей. Причина появления таких брэгговских отражателей – гибридизация волн, соответствующих различным модам в слоях таких отражателей [6]. Гибридизация приводит к перезамыканию дисперсионных кривых в точке пересечения (см. рисунок 74) и, следовательно, образованию запрещенной зоны.

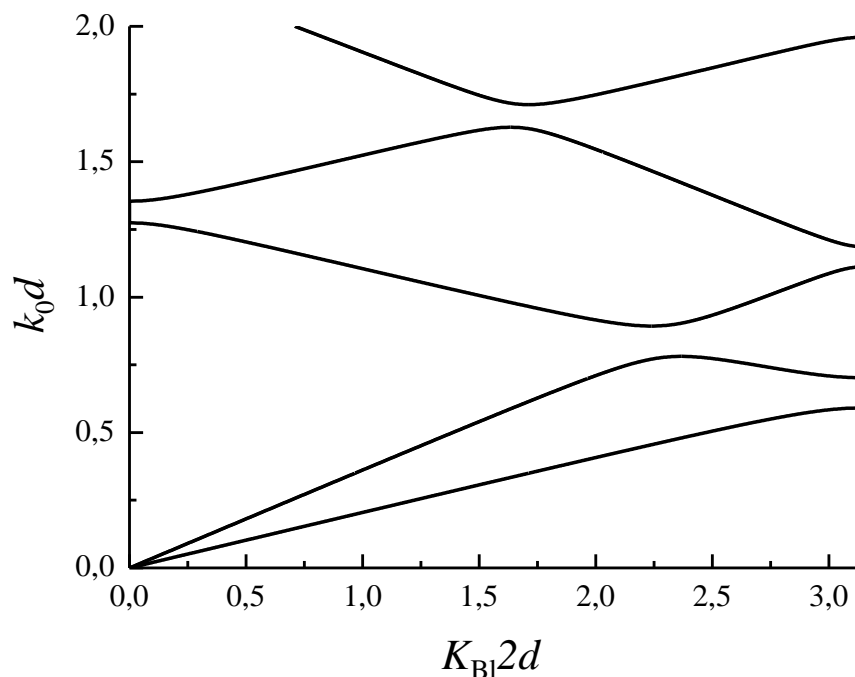


Рисунок 74 – Дисперсионные зависимости рассматриваемого идеального ФК с разнонаправленными оптическими осями слоев.

Формирование таких запрещенных зон было экспериментально обнаружено Шольцем [44] и подробно теоретически описано Юхом в работе [6]. В этой работе рассматривался ФК с периодом в два слоя из одноосных кристаллов, оптические оси которых повернуты друг относительно друга на некоторый угол (такая структура называется периодическим фильтром Шольца). Описываемым запрещенным зонам соответствует условие так называемого обменного брэгговского отражения [6]:

$$(K_1 + K_2)\Lambda = 2\pi m, \quad (83)$$

где K_1 и K_2 – блоховские волновые числа, соответствующие двум различным дисперсионным ветвям, Λ – период ФК, m – целое число.

Рассматриваемый пик индекса Ляпунова (см. рисунок 74) возникает на одной и той же частоте для всех значений $\Delta\alpha$. Эта частота $k_0d=0.83675$ соответствует точке пересечения двух различных дисперсионных ветвей идеального ФК, т.е. выполнению условия (83).

Глава 6. Некоторые вопросы гомогенизации уравнений Максвелла.

Введение

Как известно, свойства искусственных композитных материалов зависят от их структуры и состава входящих в них компонентов, и могут заметно отличаться от свойств составляющих как однородных материалов [150]. Наиболее заметно это отличие проявляется в метаматериалах, в которых взаимодействие электромагнитного поля с элементами структуры носит резонансный характер или, по крайней мере, существенную роль в этом взаимодействии играет соленоидальная часть электромагнитных полей. Поэтому метаматериалы могут обладать необычными электромагнитными свойствами (см. например [151, 152]). Тем не менее, актуальной остается задача описания метаматериалов с помощью параметров, которые обычно позволяют описывать свойства однородных материалов: диэлектрической и магнитной проницаемостей, коэффициентов киральности и т.д. Такая задача замены композитного материала однородным материалом с некоторыми эффективными параметрами называется задачей гомогенизации.

Прежде чем говорить о критериях, особенностях, области применимости различных методик гомогенизации и других вопросах, следует пояснить само понятие гомогенизации. Слово гомогенизация означает «обонороднивание» то есть замена неоднородной среды с некоторыми локальными параметрами (в качестве локальных параметров в электродинамике чаще всего имеются в виду материальные параметры – $\hat{\varepsilon}(\vec{r})$ и $\hat{\mu}(\vec{r})$), распределенными в пространстве, однородной средой с эффективными параметрами. При этом предполагается, что реакции однородной эффективной и неоднородной среды на внешнее воздействие не отличаются или различие не существенно. Например, если исследовать рассеяние электромагнитной волны на сложном неоднородном теле (см.

рисунок 75), то при замене тела из неоднородной среды на тело такой же формы, но заполненного однородной гомогенизированной средой, ожидается получение тех же данных рассеяния.

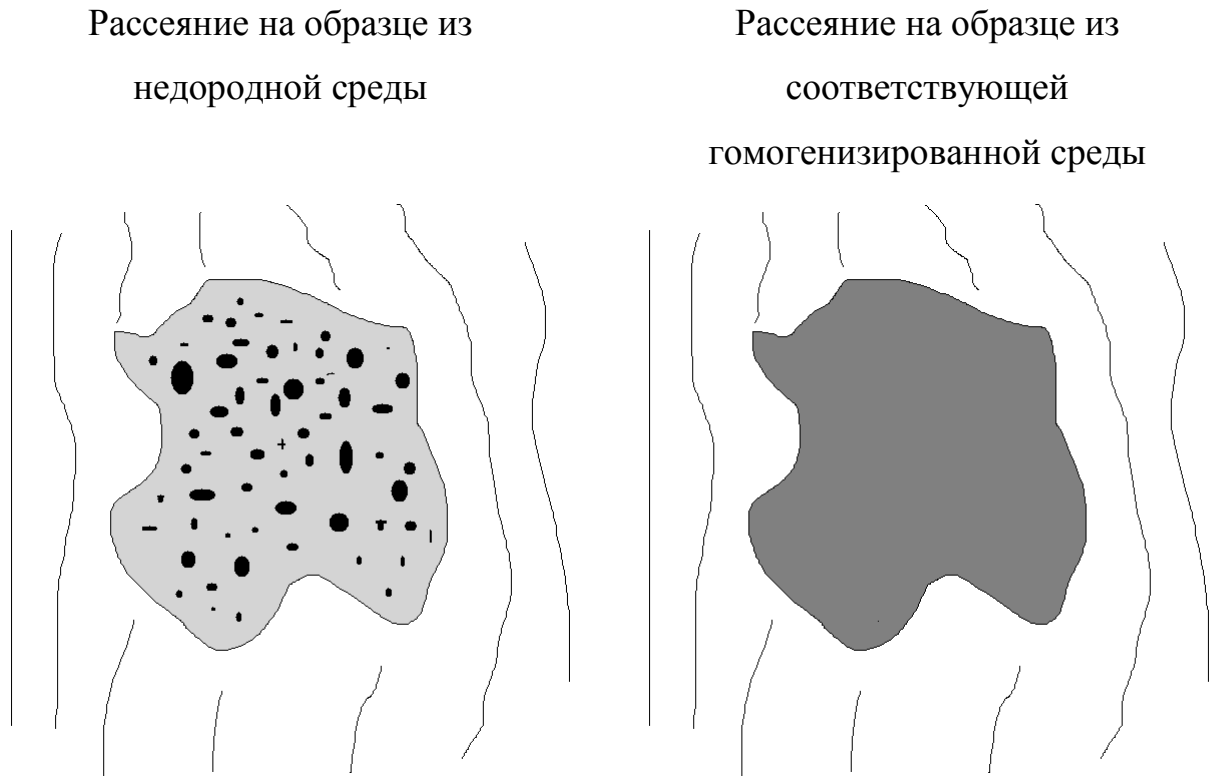


Рисунок 75 – Прохождение волны через неоднородный образец (слева) и гомогенизированный образец (справа).

Такая замена, если априори знать алгоритм восстановления эффективных параметров по свойствам неоднородной среды, значительно упрощает решение многих задач. Таким образом, основная задача теории гомогенизации – это нахождение алгоритма для восстановления эффективных параметров по заданным локальным значениям материальных параметров.

Собственно говоря, само понятие локальных значений материальных параметров уже является следствием гомогенизации атомарной/молекулярной среды. На атомном уровне нет никаких диэлектрических/магнитных проницаемостей – есть лишь рассеяния электромагнитной волны отдельными атомами, однако оказывается, что с неплохой точностью такое коллективное

рассеяние может быть описано в рамках материальных параметров, входящих в уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(H) &= \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} & \operatorname{div}(D) &= 0 \\ \operatorname{rot}(E) &= \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} & \operatorname{div}(B) &= 0 \end{aligned}, \text{ где } D = \hat{\varepsilon} E \text{ и } B = \hat{\mu} H.$$

В этом смысле рассматриваемая гомогенизация является в некотором роде вторичной гомогенизацией или гомогенизацией на более высоком уровне. Важно отметить и существенное различие между рассматриваемой гомогенизацией и введением материальных параметров. Дело в том, что на атомарных/молекулярных масштабах существенную роль начинает играть квантовая природа рассматриваемых объектов. Тем не менее, оказывается, что в качестве грубой оценки можно считать рассматриваемые среды набором диполей, взаимодействие между которыми осуществляется лишь посредством электромагнитного излучения. Эта грубая оценка, приводя к теореме погашения Овальда-Озеена, дает неплохое качественное описание для многих известных материалов. Но еще раз отметим, что есть принципиальная разница между описанием атомарных/молекулярных сред с помощью материальных параметров и гомогенизацией уравнений Максвелла на макроскопических масштабах.

Однако, даже для атомарных/молекулярных сред материальные уравнения Максвелла являются лишь приближением. В самом деле, в рентгеновском диапазоне частот для кристаллов выполняется дифракционное условие Брэгга-Вульфа. Иными словами, если на кристалл падает одна плоская монохроматическая волна, то после рассеяния, также как при рассеянии на дифракционной решетке, выйдет несколько плоских волн. Таким образом, введение материальных параметров $\hat{\varepsilon}(\vec{r})$ и $\hat{\mu}(\vec{r})$ в рентгеновской области является превышением точности гомогенизации. В дальнейшем больше не будем возвращаться к гомогенизации атомарных/молекулярных сред и будем считать, что рассматриваемые среды всегда можно описать локальными материальными параметрами.

Таким образом, приходим к важному понятию точности приближения неоднородной среды гомогенизированной. Дело в том, что всегда есть отличие данных рассеяния, частоты собственных мод и других характеристик неоднородной среды и соответствующей ей гомогенизированной. Например, между однородной и неоднородной средой всегда есть различие при рассеивании ближних полей, так как на неоднородностях ближние поля могут преобразовываться в дальние. Если рассмотреть периодическую среду, то как описано выше, когда длина волны сравнима с расстоянием между включениями, система является объемной дифракционной решеткой и не может быть адекватно описана при помощи гомогенизированных материальных параметров. Говоря о точности теории гомогенизации важно также отметить форму исследуемого тела: если, например, исследовать воздушные включения в диэлектрическую матрицу, можем ли мы считать неровную поверхность рассматриваемого тела частью таких воздушных включений? Кроме того, гомогенизированные параметры, которые с хорошей точностью описывают рассеяние волны на плоскопараллельном слое, могут плохо описывать рассеяние волны на теле сферической формы, сделанном из того же материала.

В дальнейшем для простоты будем рассматривать наиболее распространенную геометрию изучаемого тела – плоскопараллельный слой. В этом случае кажется естественным разделить явления, возникающие при прохождении волны через неоднородный слой, на поверхностные и объемные. Такое разделение соответствует прохождению волны через однородный гомогенизированный слой. Действительно, рассеяние волны на гомогенизированном слое можно разбить на три этапа: переход из воздуха в слой, распространение по однородному слою и обратный переход из слоя в воздух. Первый и последний этапы описываются поверхностными явлениями, в то время как второй этап описывается объемными. Поверхностные явления описываются посредством граничных условий, в то время как объемные – с помощью волнового вектора.

Для уравнений Максвелла задача гомогенизации, обычно сводящаяся к нахождению ε_{eff} и μ_{eff} , становится многомасштабной. Появляются масштабы, связанные с самими уравнениями, а именно, набор локальных значений длин волн $\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon \mu}$, где $\lambda_0 = 2\pi / k_0$ – длина волны в вакууме, k_0 – волновое число. При наличии многих масштабов переход от конечной системы к бесконечной сопряжен с определенными трудностями [153] и результаты теории G-конвергенции в общем случае применить не удастся. Тем не менее, обычно предполагается [154-156], что если линейный размер l_{avr} физически бесконечно малого объема удовлетворяет неравенству

$$d \ll l_{avr} \ll \lambda_0, \quad (83)$$

то усредненные поля подчиняются макроскопическим уравнениям Максвелла, в которые входят эффективные материальные константы. Очевидно, что при выполнении строгого неравенства

$$d \sqrt{\varepsilon_{\max} \mu_{\max}} \ll \lambda_0$$

(индекс \max указывает на максимальное локальное значение восприимчивости) всегда можно подобрать подходящий размер l_{avr} , удовлетворяющий (83), что, казалось бы, достаточно для введения эффективных параметров [154-156].

Существует два подхода для определения эффективных параметров. Первый, феноменологический, успешно применяемый в статике, связан с усреднением материальных уравнений:

$$\langle \vec{D} \rangle = \varepsilon_{эфф} \langle \vec{E} \rangle, \quad \langle \vec{B} \rangle = \mu_{эфф} \langle \vec{H} \rangle,$$

где скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по физически бесконечно малому объему (более сложные формы усреднения, в том числе усреднение по поверхностям бесконечно малого объема, по ансамблю и др. будут подробно обсуждены далее). Вместо усреднения полей можно использовать магнитную, электрическую и квадрупольную поляризации, вводя вместо проницаемостей восприимчивости. В статике в качестве микроскопических уравнений используют уравнение Лапласа, а для переменных во времени полей – систему материальных уравнений

Максвелла. Предполагается, что усредненные поля подчиняются тем же уравнениям, но с эффективными материальными параметрами – диэлектрической ε_{eff} и магнитной μ_{eff} проницаемостями. Строгое доказательство этого факта и алгоритм расчета ε_{eff} и μ_{eff} существуют только для безграничных периодических систем, находящихся в постоянном поле [157]. При этом используется так называемая теория G-конвергенции. Узловым моментом теории G-конвергенции является тот факт, что потенциал постоянного поля подчиняется безмасштабному уравнению – уравнению Лапласа. В этом случае все линейные размеры могут быть измерены в единицах d . В результате зависимость любой величины от размера системы L может проявляться только как функция отношения L/d . Стремление L/d к бесконечности может быть достигнуто либо стремлением L к бесконечности, либо стремлением d к нулю. Это придает физический смысл рассмотрению бесконечно большой системы, а именно, это рассмотрение подразумевает выполнение строгого неравенства $L \gg d$.

Второй подход из первых принципов, связан с экспериментальным определением материальных параметров, включая компьютерное моделирование. Он основан на восстановлении эффективных параметров по известным коэффициентам отражения и прохождения через образец [158, 159]. При этом, как правило, используются формулы Френеля, предполагающие, что граничным условиям Максвелла подчиняются комплексные амплитуды дальних полей, точнее, аналитические продолжения дальних полей к границе образца (см. [160, 161]).

Теория Рытова. Решение задачи о нахождении эффективных параметров одномерной периодической среды, помещенной в постоянное поле, известно еще с позапрошлого века [162, 163]. Например, если поле направлено вдоль слоев, то в силу непрерывности тангенциальной составляющей поля $\varepsilon_{eff} = \langle \varepsilon \rangle$. Для переменных полей решение было дано Левиным и Рытовым [41, 164-166]. М.Л. Левин [166] детально рассмотрел распространение электромагнитной волны в периодически слоистой среде перпендикулярно к слоям, лишенным

поглощения. Весьма обстоятельное и последовательное изложение вопроса было дано С.М. Рытовым [164] для случая бесконечной периодической среды, состоящей из слоев с проницаемостями ε_1 , μ_1 и ε_2 , μ_2 . По прошествии многих лет работы Рытова стали классическими, породив целое направление, посвященное гомогенизации одномерных сред различной природы [167-171].

Из симметрии задачи ясно, что для определения средних постоянных среды достаточно рассмотреть три случая распространения волны: распространение в направлении, параллельном слоям, при двух поляризациях (либо электрический, либо магнитный вектор параллелен слоям) и распространение в направлении, перпендикулярном к слоям.

Сначала рассмотрим подробнее метод Рытова на примере распространения волны перпендикулярно слоям с толщами d_1 и d_2 и проницаемостями ε_1 , μ_1 и ε_2 , μ_2 (см.рисунок 76).

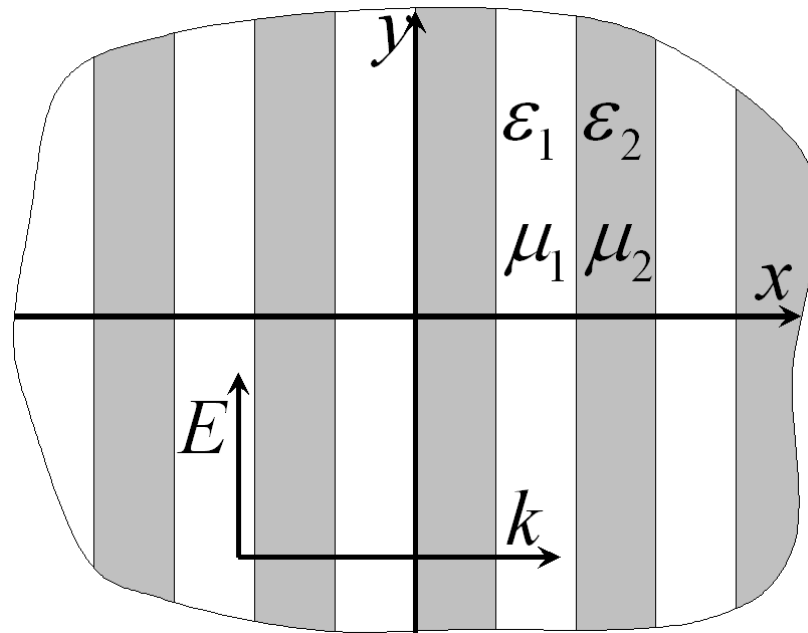


Рисунок 76 – Геометрия рассматриваемой задачи.

Поскольку рассматривается бесконечная периодическая слоистая среда, то в соответствии с теоремой Флоке-Блоха решение уравнений Максвелла имеет вид

$$E = e^{ik_{\text{БЛ}}x} f(x) \text{ и } H = e^{ik_{\text{БЛ}}x} g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – периодические функции с периодом, равным периоду системы (ось x перпендикулярна слоям), а k_{Bl} – блоховский волновой вектор.

В качестве эффективного волнового числа k_{eff}^{Ryt} Рытов предложил взять k_{Bl} , соответствующий эффективный показатель преломления $n_{eff}^{Ryt} = \sqrt{\varepsilon_{eff}^{Ryt} \mu_{eff}^{Ryt}} = k_{eff}^{Ryt} / k_0$, где $k_0 = \omega / c$. Но для полного описания среды (нахождения как ε_{eff}^{Ryt} , так и μ_{eff}^{Ryt}) недостаточно знать лишь n_{eff}^{Ryt} , необходимо определить эффективный адмитанс $Y_{eff}^{Ryt} = \sqrt{\varepsilon_{eff}^{Ryt} / \mu_{eff}^{Ryt}}$ (часто в литературе используется не адмитанс, а импеданс $Z = 1/Y = \sqrt{\mu / \varepsilon}$). Рытовым было предложено следующее определение адмитанса: $Y_{eff}^{Ryt} = \langle H \rangle / \langle E \rangle$, где усреднение полей E и H берется по периоду системы.

Таким образом, найдя распределение поля, можно найти рытовские эффективные проницаемости. Расположим начало координат на границе слоев (см. рисунок 76), при этом пусть область $x \in [-d_1, 0]$ относится к первому слою, а область $x \in [0, d_2]$ – ко второму. В каждом из слоев собственными решениями будут плоские волны, поэтому учитывая (1) получим

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ik_0 n_{eff}^{Ryt} x} (Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x}), & \text{при } x \in [-d_1, 0] \\ e^{-ik_0 n_{eff}^{Ryt} x} (Ce^{ik_2 x} + De^{-ik_2 x}), & \text{при } x \in [0, d_2] \end{cases}$$

и, соответственно,

$$g(x) = \begin{cases} Y_1 e^{-ik_0 n_{eff}^{Ryt} x} (Ae^{ik_1 x} - Be^{-ik_1 x}), & \text{при } x \in [-d_1, 0] \\ Y_2 e^{-ik_0 n_{eff}^{Ryt} x} (Ce^{ik_2 x} - De^{-ik_2 x}), & \text{при } x \in [0, d_2] \end{cases},$$

где $k_i = k_0 \sqrt{\varepsilon_i \mu_i}$ – волновые векторы в соответствующих слоях, а $Y_i = \sqrt{\varepsilon_i / \mu_i}$ – соответствующие адмитансы.

Учитывая непрерывность полей и периодичность $f(x)$ и $g(x)$ получим четыре линейных однородных уравнения относительно A, B, C, D :

$$A + B = C + D,$$

$$e^{ik_0 n_{eff}^{Ryt} d_1} (Ae^{-ik_1 d_1} + Be^{ik_1 d_1}) = e^{-ik_0 n_{eff}^{Ryt} d_2} (Ce^{ik_2 d_2} + De^{-ik_2 d_2}), \quad (84)$$

$$A - B = \frac{Y_2}{Y_1} (C - D),$$

$$e^{ik_0 n_{eff}^{Ryt} d_1} (Ae^{-ik_1 d_1} - Be^{ik_1 d_1}) = \frac{Y_2}{Y_1} e^{-ik_0 n_{eff}^{Ryt} d_2} (Ce^{ik_2 d_2} - De^{-ik_2 d_2}),$$

которые имеют нетривиальное решение, только когда детерминант соответствующей матрицы, составленной из коэффициентов этих уравнений, равен нулю. Отсюда получаем уравнение, определяющее n_{eff}^{Ryt} :

$$\cos(k_0 n_{eff}^{Ryt} (d_1 + d_2)) = \cos(k_0 \sqrt{\varepsilon_1} d_1) \cos(k_0 \sqrt{\varepsilon_2} d_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{Y_1}{Y_2} + \frac{Y_2}{Y_1} \right) \sin(k_0 \sqrt{\varepsilon_1} d_1) \sin(k_0 \sqrt{\varepsilon_2} d_2)$$

Найдя из уравнения (84) коэффициенты A, B, C, D (например выразив A, B, C через D), в длинноволновом приближении получим следующие выражения для эффективных параметров [164]:

$$\varepsilon_{eff} = \langle \varepsilon \rangle \left[1 + ik_0 \frac{d_1 d_2}{4(d_1 + d_2)} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\sqrt{\langle \varepsilon \rangle}} \right], \quad \mu_{eff} = \left[1 - ik_0 \frac{d_1 d_2}{4(d_1 + d_2)} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\sqrt{\langle \varepsilon \rangle}} \right]$$

Заметим, что хотя ε_1 , ε_2 , μ_1 и μ_2 чисто действительные¹⁷, ε_{eff} и μ_{eff} являются комплексными величинами. Более того, в зависимости от того, какой из слоев считается первым и какой вторым, либо ε_{eff} либо μ_{eff} имеет отрицательную мнимую часть, что заставляет сомневаться в возможности придать физический смысл полученным величинам.

Отметим, что отрицательное значение мнимой части восприимчивости связано с генерацией энергии. Однако в выражение для диссипации (генерации) энергии входят обе восприимчивости, так что отрицательность мнимой части одной может быть компенсирована положительностью мнимой части другой (см. [172]). Для того, чтобы рассмотреть физический смысл каждой из

¹⁷ Так как Рытов рассматривал бесконечную среду, то он вынужден был ограничиться бездиссипативными системами.

восприимчивостей отдельно и отождествить отрицательную мнимую часть, скажем, для определенности, у μ_{eff} , с усилением излучения, необходимо поместить образец в пучность магнитного поля, где величиной электрического поля можно пренебречь. Такой эксперимент можно провести лишь с конечной системой, а не с бесконечной, рассмотренной Рытовым.

Рассмотрим теперь распространение вдоль слоев, когда вектор \vec{E} параллелен границам слоев. Направим ось x в направлении распространения волны. Направление \vec{E} совместим с осью y . Ось z направляем нормально границам слоев (см. рисунок 77).

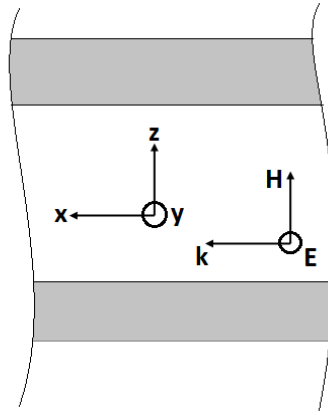


Рисунок 77 – Распространение волны вдоль слоев. Вектор \vec{E} параллелен границам слоев.

Для отличных от нуля компонент электромагнитного поля $E_y = E$, H_x и H_z имеем в каждом из слоев уравнения:

$$\partial E / \partial z = -ik\mu H_x, \quad \partial E / \partial x = ik\mu H_z, \quad \partial H_z / \partial x - \partial H_x / \partial z = ik\varepsilon E,$$

где $k = \omega/c$, а через ε обозначена комплексная диэлектрическая проницаемость среды. Проницаемости ε и μ меняются периодически в зависимости от z , поочередно принимая значения ε_1 , μ_1 в одном слое и ε_2 , μ_2 – в другом.

Решение уравнений будем искать в виде

$$E = U(z)e^{iknx}, \quad H_x = V(z)e^{iknx}, \quad H_z = W(z)e^{iknx},$$

где U , V и W – пока неизвестные функции z , а n – показатель преломления, характеризующий скорость распространения волн вдоль слоев, который необходимо определить. Подстановка дает

$$\partial U / \partial z = -ik\mu V, \quad nU = \mu W, \quad \partial V / \partial z - iknW = -ik\varepsilon U.$$

Выберем произвольную пару соседних слоев и поместим начало координат на границе между ними. Слой с постоянными ε_1 и μ_1 пусть простирается от $z=0$ до $z=h_1$, а слой с постоянными ε_2 и μ_2 – от $z=-h_2$ до $z=0$ (см. рисунок 78).

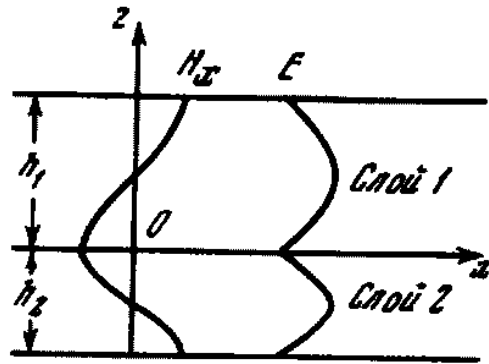


Рисунок 78 – Распределение компонент электрического и магнитного полей в толщине слоев.

Решения уравнений в каждом слое будут:

$$0 \leq z \leq h_1$$

$$U_1 = A \cos \alpha_1 z + B \sin \alpha_1 z,$$

$$V_1 = (\alpha_1 / ik\mu_1)(A \sin \alpha_1 z - B \cos \alpha_1 z),$$

$$W_1 = (n / \mu_1)(A \cos \alpha_1 z + B \sin \alpha_1 z),$$

$$\alpha_1 = k(n_1^2 - n^2)^{1/2}, \quad n_1^2 = \varepsilon_1 \mu_1;$$

$$-h_2 \leq z \leq 0$$

$$U_2 = C \cos \alpha_2 z + D \sin \alpha_2 z,$$

$$V_2 = (\alpha_2 / ik\mu_2)(C \sin \alpha_2 z - D \cos \alpha_2 z),$$

$$W_2 = (n / \mu_2)(C \cos \alpha_2 z + D \sin \alpha_2 z),$$

$$\alpha_2 = k(n_2^2 - n^2)^{1/2}, \quad n_2^2 = \varepsilon_2 \mu_2.$$

На эти решения должны быть наложены четыре условия непрерывности и периодичности E и H_x (т. е. U и V) по z :

$$\begin{aligned}U_1(0) &= U_2(0), & U_1(h_1) &= U_2(-h_2), \\V_1(0) &= V_2(0), & V_1(h_1) &= V_2(-h_2).\end{aligned}$$

В результате получаем четыре однородных уравнения:

$$\begin{aligned}C &= A, & C \cos \alpha_2 h_2 - D \sin \alpha_2 h_2 &= A \cos \alpha_1 h_1 + B \sin \alpha_1 h_1, \\D &= pB, & C \sin \alpha_2 h_2 + D \cos \alpha_2 h_2 &= -p(A \sin \alpha_1 h_1 - B \cos \alpha_1 h_1),\end{aligned}$$

где

$$p = \mu_2 \alpha_1 / \mu_1 \alpha_2.$$

Приравнявая нулю детерминант системы однородных уравнений, получаем дисперсионное уравнение, определяющее n как функцию k :

$$(1 + p^2) \sin \alpha_1 h_1 \sin \alpha_2 h_2 + 2p(1 - \cos \alpha_1 h_1 \cos \alpha_2 h_2) = 0.$$

Разрешив это уравнение относительно p , нетрудно привести его к совокупности следующих двух уравнений:

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 h_2 / 2) \operatorname{ctg}(\alpha_1 h_1 / 2) = -p, \quad \operatorname{tg}(\alpha_2 h_2 / 2) \operatorname{ctg}(\alpha_1 h_1 / 2) = -1/p. \quad (85)$$

Пользуясь системой однородных уравнений, можно показать, что первое из уравнений (85) соответствует волне, в которой E и H_z распределены в каждом слое симметрично относительно его середины, т. е. являются четными функциями $\left[z - \frac{h_1}{2}\right]$ в слое 1 и $\left[z + \frac{h_2}{2}\right]$ в слое 2. Компонента же H_x при этом нечетная. Зависимость компонент $E = E_y$ и H_x от координаты z для этого случая изображена на рисунке 78. В дальнейшем исследуем электрическое и магнитное поля, усредненные по периоду структуры $d = h_1 + h_2$. Так как в волне рассматриваемого типа среднее значение H_x равно нулю, то волна будет иметь лишь компоненты E_y , H_z , т. е. является чисто поперечной волной.

Таким же образом можно показать, что второе из уравнений (85) дает волну, в которой H_x четно, а E и H_z нечетны относительно середин слоев. В результате, усредненное поле будет иметь только продольную компоненту H_x . Однако нетрудно видеть, что такая волна будет быстро затухать в направлении x , вследствие чего исключим ее из дальнейшего анализа. Действительно,

пространство между серединами двух слоев, например, между $-\frac{h_2}{2}$ и $\frac{h_1}{2}$ можно рассматривать как ограниченное двумя абсолютно проводящими плоскостями, поскольку на них в рассматриваемом случае $E = H_z = 0$. Но известно, что в волноводах с абсолютно проводящими стенками волны, содержащие тангенциальную компоненту \vec{E} (в данном случае компонента $E_y = E$) практически не могут распространяться и сильно затухают уже на расстоянии, равном ширине волновода (в рассматриваемом случае $d/2$), если длина волны велика по сравнению с d . Этот результат остается справедливым при любых проницаемостях ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2 «прокладок» между идеально проводящими стенками.

Итак, остановимся на первом из двух рассмотренных выше случаев и обозначим значения E_y и H_z , усредненные по периоду d , через \bar{E}_y и \bar{H}_z . Введем μ^e и ε^e – «эффективные» значения проницаемостей – так, чтобы соблюдались соотношения:

$$\bar{E}_y / \bar{H}_z = (\mu^e / \varepsilon^e)^{1/2}, \quad n^2 = \mu^e \varepsilon^e,$$

где n – корень первого из уравнений.

Имеем

$$\bar{E}_y = \frac{1}{h_1 + h_2} \left[\int_0^{h_1} U_1 dz + \int_{-h_2}^0 U_2 dz \right].$$

Соотношениями между A, B, C и D необходимо воспользоваться только после интегрирования. Аналогично находится \bar{H}_z . В результате получаем

$$\bar{E}_y / \bar{H}_z = (\mu_1 \alpha_2^2 - \mu_2 \alpha_1^2) / n(\alpha_2^2 - \alpha_1^2).$$

Подставляя и решая затем два уравнения относительно ε^e и μ^e , находим:

$$\varepsilon^e = n(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(\mu_1 \alpha_2^2 - \mu_2 \alpha_1^2)^{-1}, \quad \mu^e = (\mu_1 \alpha_2^2 - \mu_2 \alpha_1^2)(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)^{-1}.$$

Рассмотрим детальнее случай малых толщин h_1 и h_2 . Заменяя в (85)

$tg(\alpha_2 h_2 / 2) \approx \alpha_2 h_2 / 2$, $ctg(\alpha_1 h_1 / 2) \approx (\alpha_1 h_1 / 2)^{-1}$, получаем

$$\varepsilon^e = \bar{\varepsilon}, \quad \mu^e = \tilde{\mu},$$

где $\bar{\varepsilon} = \frac{h_1 \varepsilon_1 + h_2 \varepsilon_2}{h_1 + h_2}$ – среднее значение ε по периоду,

$\frac{1}{\tilde{\mu}} = \frac{1}{\mu} = \frac{h_1 / \mu_1 + h_2 / \mu_2}{h_1 + h_2}$ – среднее значение $1/\mu$ по периоду.

Более точная оценка с учетом кубических членов в разложении дает

$$\varepsilon^e = \bar{\varepsilon} \left[1 + \frac{k^2 h_1^2 h_2^2}{12(h_1 + h_2)^2} \frac{\bar{\mu} \tilde{\mu}}{\mu_1 \mu_2} (n_1^2 - n_2^2) \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\bar{\varepsilon}} \right],$$

$$\mu^e = \tilde{\mu} \left[1 + \frac{k^2 h_1^2 h_2^2}{12(h_1 + h_2)^2} \frac{\bar{\mu} \tilde{\mu}}{\mu_1 \mu_2} (n_1^2 - n_2^2) \tilde{\mu} (\mu_1 - \mu_2) \right],$$

где $n_1^2 \equiv \varepsilon_1 \mu_1$, $n_2^2 \equiv \varepsilon_2 \mu_2$.

Видно, что поправочные члены имеют порядок $k^2 d^2 = k^2 (h_1 + h_2)^2$. Кроме того, при заданных h_1 и h_2 они играют тем меньшую роль, чем ближе параметры одного вещества к параметрам другого.

Теперь рассмотрим распространение вдоль слоев, когда вектор \vec{H} параллелен границам слоев (см. рисунок 79).

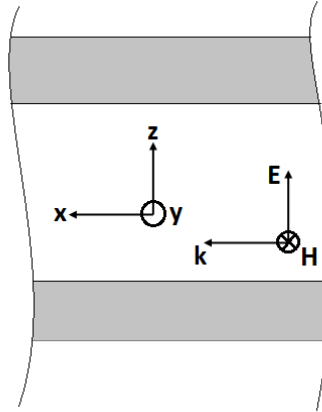


Рисунок 79 – Распространение вдоль слоев. Вектор \vec{H} параллелен границам слоев.

Уравнения для электромагнитного поля, имеющего в этом случае компоненты E_x , E_z и $H_y = H$ будут

$$\partial H / \partial z = ik \varepsilon E_x, \quad \partial H / \partial x = -ik \varepsilon E_z, \quad \partial E_x / \partial z - \partial E_z / \partial x = ik \mu H.$$

Условиям непрерывности и периодичности на границах между слоями будут подчинены H и E_x . Очевидно, все формулы, относящиеся к рассматриваемому случаю, могут быть получены из формул предыдущего случая, если в последних произвести замену \vec{H} , \vec{E} , ε , μ соответственно на \vec{E} , \vec{H} , μ , ε .

Усреднение выражений для компонент поля по периоду структуры $d = h_1 + h_2$ дает поперечную волну, компоненты которой $\overline{H_y}$ и $\overline{E_z}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\partial \overline{H_y} / \partial x = -ik \varepsilon^e \overline{E_z}, \quad \partial \overline{E_z} / \partial x = -ik \mu^e \overline{H_y},$$

где эффективные значения проницаемостей выражаются формулами:

$$\varepsilon^e = \frac{\varepsilon_1 \alpha_2^2 - \varepsilon_2 \alpha_1^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}, \quad \mu^e = n^2 \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\varepsilon_1 \alpha_2^2 - \varepsilon_2 \alpha_1^2}.$$

Соответствующее уравнение для n будет

$$(\alpha_2 / \varepsilon_2) \operatorname{tg}(\alpha_2 h_2 / 2) = -(\alpha_1 / \varepsilon_1) \operatorname{tg}(\alpha_1 h_1 / 2).$$

При малых h_1 и h_2 получаем

$$\varepsilon^e = \tilde{\varepsilon}, \quad \mu^e = \bar{\mu},$$

где

$$\frac{1}{\tilde{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{h_1 / \varepsilon_1 + h_2 / \varepsilon_2}{h_1 + h_2}, \quad \bar{\mu} = \frac{h_1 \mu_1 + h_2 \mu_2}{h_1 + h_2}.$$

Обобщение Рытова на трехмерный случай. Подход Смита-Пендри. В предыдущем разделе было показано, что для слоистых систем вне статического приближения гомогенизация диэлектрической и магнитной проницаемостей теряет смысл. Как было показано, это связано с тем, что для слоистых систем не гомогенизуется импеданс.

Нужно отметить, что до сих пор не вполне понятно, связано ли отсутствие эффективного импеданса с принципиальной одномерностью слоистой системы, или же импеданс всегда не гомогенизируется вне статики. Таким образом, возникает естественный вопрос: что будет с гомогенизацией периодических сред в двумерном и трехмерном случаях?

Рытовская идея (усреднения по ячейке) была обобщена двумя группами: Смит-Пендри [173] и Аше [174].

Метод гомогенизации, предложенный Пендри, основан на усреднении по объему. Рассмотрим его подробнее.

Собственным решением в периодической среде является блоховская волна.

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(r) \\ \vec{H}(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}(r) \\ \vec{g}(r) \end{pmatrix} e^{-ik_B r}$$

Ключевой момент процедуры гомогенизации заключается в переходе от точных уравнений Максвелла к точным дискретным уравнениям, описывающим усредненные величины.

Введем декартову систему координат, привязанную к элементарной ячейке x, y, z (см. рисунок 80).

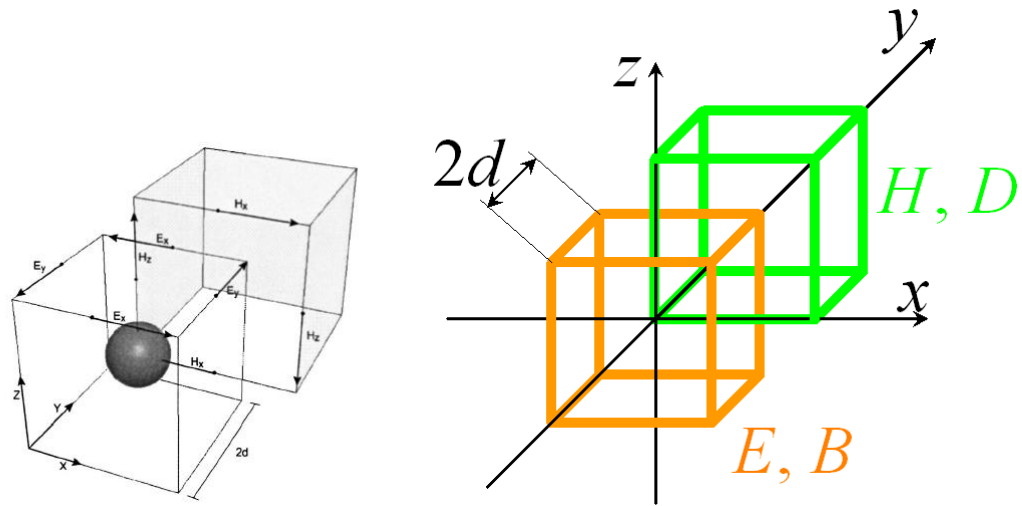


Рисунок 80 – Включение, система координат и две кубические ячейки.

Поля E и B усредняются по ребрам и граням первой кубической ячейки (которая показана оранжевым цветом на рисунке 80), а поля H и D усредняются по ребрам и граням второй кубической ячейки (которая показана на рисунке 80 зеленым цветом).

Из уравнений Максвелла:

$$\nabla \times \vec{E} = ik_0 \vec{B}$$

В координатной форме:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = ik_0 B_x$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = ik_0 B_y$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = ik_0 B_z$$

Воспользовавшись теоремой Стокса¹⁸, получим:

$$\int_{-d}^d E_z(d, d, z) dz - \int_{-d}^d E_z(d, -d, z) dz + \int_{-d}^d E_y(d, y, -d) dy - \int_{-d}^d E_y(d, y, d) dy = ik_0 \int_{-d}^d \int_{-d}^d B_x(d, y, z) dy dz$$

$$\int_{-d}^d E_x(d, d, z) dz - \int_{-d}^d E_x(d, -d, z) dz + \int_{-d}^d E_z(d, y, -d) dy - \int_{-d}^d E_z(d, y, d) dy = ik_0 \int_{-d}^d \int_{-d}^d B_y(x, d, z) dx dz$$

$$\int_{-d}^d E_x(d, d, z) dz - \int_{-d}^d E_x(d, -d, z) dz + \int_{-d}^d E_y(d, y, -d) dy - \int_{-d}^d E_y(d, y, d) dy = ik_0 \int_{-d}^d \int_{-d}^d B_z(x, y, d) dx dy$$

Определим средния поля \bar{E} и \bar{B} как

$$\bar{E}_x(0, \pm d, d) = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d E_x(x, \pm d, d) dx$$

$$\bar{E}_y(\pm d, 0, d) = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d E_y(\pm d, y, d) dy$$

$$\bar{B}_z(0, 0, \pm d) = \frac{1}{(2d)^2} \int_{-d}^d \int_{-d}^d B_z(x, y, \pm d) dx dy$$

Получим уравнения на эффективные поля

$$\bar{E}_z(d, d, 0) - \bar{E}_z(d, -d, 0) + \bar{E}_y(d, 0, -d) - \bar{E}_y(d, 0, d) = i(2d)k_0 \bar{B}_x(d, 0, 0)$$

$$\bar{E}_x(0, d, d) - \bar{E}_x(0, d, -d) + \bar{E}_z(-d, d, 0) - \bar{E}_z(d, d, 0) = i(2d)k_0 \bar{B}_y(0, d, 0)$$

$$\bar{E}_x(0, d, d) - \bar{E}_x(0, -d, d) + \bar{E}_y(-d, 0, d) - \bar{E}_y(d, 0, d) = i(2d)k_0 \bar{B}_z(0, 0, d)$$

¹⁸ Если есть поток вектора \vec{F} через площадку S , ограниченную контуром L , то $\int (\nabla \times \vec{F}, d\vec{s}) = \oint (\vec{F}, d\vec{l})$, где (\vec{a}, \vec{b}) – скалярное произведение, а $d\vec{s}$ и $d\vec{l}$ – элементы площади и контура.

Аналогично для H и D :

$$\nabla \times \vec{H} = ik_0 \vec{D}$$

Получим:

$$\int_0^{2d} H_z(d, d, z) dz - \int_0^{2d} H_z(d, -d, z) dz + \int_0^{2d} H_y(d, y, -d) dy - \int_0^{2d} H_y(d, y, d) dy = ik_0 \int_0^{2d} \int_0^{2d} D_x(d, y, z) dy dz$$

$$\int_0^{2d} H_x(d, d, z) dz - \int_0^{2d} H_x(d, -d, z) dz + \int_0^{2d} H_z(d, y, -d) dy - \int_0^{2d} H_z(d, y, d) dy = ik_0 \int_0^{2d} \int_0^{2d} D_y(x, d, z) dx dz$$

$$\int_0^{2d} H_x(d, d, z) dz - \int_0^{2d} H_x(d, -d, z) dz + \int_0^{2d} H_y(d, y, -d) dy - \int_0^{2d} H_y(d, y, d) dy = ik_0 \int_0^{2d} \int_0^{2d} D_z(x, y, d) dx dy$$

Определим средние поля \bar{H} и \bar{D} как

$$\bar{H}_x(d, d \pm d, 0) = \frac{1}{2d} \int_0^{2d} H_x(x, d \pm d, 0) dx$$

$$\bar{H}_y(d \pm d, d, 0) = \frac{1}{2d} \int_0^{2d} H_y(d \pm d, y, 0) dy$$

$$\bar{D}_z(d, d, 0) = \frac{1}{(2d)^2} \int_0^{2d} \int_0^{2d} D_z(x, y, 0) dx dy$$

В итоге получим

$$\bar{H}_z(0, 2d, d) - \bar{H}_z(0, 0, d) - \bar{H}_y(0, d, 2d) + \bar{H}_y(d, 0, d) = i(2d)k_0 \bar{D}_x(0, d, d)$$

$$\bar{H}_x(d, 0, 2d) - \bar{H}_x(d, 0, 0) - \bar{H}_z(2d, 0, d) + \bar{H}_z(0, 0, d) = i(2d)k_0 \bar{D}_y(d, 0, d)$$

$$\bar{H}_x(d, 2d, 0) - \bar{H}_x(d, 0, 0) - \bar{H}_y(2d, d, 0) + \bar{H}_y(0, d, 0) = i(2d)k_0 \bar{D}_z(d, d, 0)$$

Важно отметить, что при этом поля \bar{E} и \bar{D} определены в разных пространственных точках.

Используя линейность уравнений Максвелла, можно получить

$$\bar{D} = \hat{\varepsilon} \bar{E} - i\kappa \bar{H} \quad (86)$$

$$\bar{B} = \hat{\mu} \bar{H} + i\kappa^T \bar{E}$$

где $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}, \hat{\kappa}$ – эффективные материальные параметры.

Вообще говоря, в уравнении (86) величины $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}, \hat{\kappa}$ должны быть интегральными операторами. Действительно, поскольку пары полей \bar{E} , \bar{D} и \bar{H} , \bar{B} попарно определены в одних и тех же точках, то $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ при дополнительных допущениях еще могут быть просто постоянными. А вот с $\hat{\kappa}$ ситуация совершенно иная: поскольку поля \bar{D} и \bar{H} (\bar{B} и \bar{E}) определены в разных пространственных точках, то связь между ними должна явно носить нелокальный характер.

Однако, ограничиваясь в дальнейшем рассмотрением лишь симметричными включениями, можно предположить, что эффективная киральность равна нулю $\hat{\kappa} \equiv 0$. Это утверждение на данный момент не доказано и должно быть принято лишь как предположение. В случае отсутствия эффективной киральности ($\hat{\kappa} \equiv 0$) уравнения (86) переходят в

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \hat{\varepsilon} \bar{E} \\ \bar{B} &= \hat{\mu} \bar{H}\end{aligned}\tag{86a}$$

где материальные уравнения связывают поля, определенные в одних и тех же точках.

Поскольку ε_{eff} определяется в (86a) через интегралы от локального поля по какой-то одной конкретной ячейке, то возникает важный вопрос: во всех ли ячейках ε_{eff} одинаково? Проверка показывает, что если в качестве локальных полей $\vec{D}(r)$ и $\vec{E}(r)$ взять одну блоховскую функцию, то сдвиг на период (в силу блоховского вида решений) приводит к той же диэлектрической проницаемости ε_{eff} .

Действительно, пусть $\vec{E}(x + 2d, y, z) = \vec{E}(x, y, z)e^{ik_x 2d}$, тогда

$$\vec{D}(x + 2d, y, z) = \varepsilon(x + 2d, y, z) \vec{E}(x + 2d, y, z) = \varepsilon(x, y, z) \vec{E}(x, y, z)e^{ik_x 2d} = \vec{D}(x, y, z)e^{ik_x 2d}$$

Воспользовавшись $\vec{D}(0, d, d) = \hat{\varepsilon}_{eff}(0, d, d) \vec{E}(0, d, d)$, найдем $\vec{D}(2d, d, d)$:

$$\begin{aligned}
\bar{D}(2d, d, d) &= \frac{1}{(2d)^2} \int_{-d}^{3d} \int_{-d}^d D_z(x, y, d) dx = e^{ik_x 2d} \bar{D}(0, d, d) = \\
&= e^{ik_x 2d} \hat{\varepsilon}_{eff}(0, d, d) \bar{E}(0, d, d) = e^{ik_x 2d} \hat{\varepsilon}_{eff}(0, d, d) \frac{1}{2d} \int_{-d}^d E_x(x, d, d) dx \\
&= \hat{\varepsilon}_{eff}(0, d, d) \frac{1}{2d} \int_{-d}^d e^{ik_x 2d} E_x(x, d, d) dx = \hat{\varepsilon}_{eff}(0, d, d) \frac{1}{2d} \int_{-d}^d E_x(x + d, d, d) dx = \\
&= \hat{\varepsilon}_{eff}(0, d, d) \bar{E}(2d, d, d)
\end{aligned}$$

Иными словами,

$$\hat{\varepsilon}_{eff}(2d, d, d) = \hat{\varepsilon}_{eff}(0, d, d).$$

Таким образом, если рассматривать решение в виде одной блоховской волны $\vec{E}(r) = \vec{f}(r) e^{-ik_{Bl}r}$, то определение (86а) даёт одинаковые значения эффективной проницаемости во всех ячейках.

При этом важно отметить, что поскольку функция \vec{f} зависит от направления распространения волны, то и эффективные параметры также являются функцией направления. В частности, при смене направления на противоположное ($\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$) функция \vec{f} заменяется на комплексно сопряженную величину \vec{f}^* и ε_{eff} заменяется на комплексно сопряженную величину ε_{eff}^* .

Действительно, рассмотрим периодическую немагнитную непоглощающую среду, описывающуюся действительным тензором диэлектрической проницаемости. Поскольку уравнения, описывающие распространение электромагнитного поля, — это линейные уравнения в действительных коэффициентах

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - k_0^2 \hat{\varepsilon}(r) \vec{E} = 0 \quad (87)$$

то комплексное сопряжение уравнения дает

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}^* - k_0^2 \hat{\varepsilon}(r) \vec{E}^* = 0$$

Иными словами, если $\vec{E}(r)$ является решением (87), то комплексно сопряженная величина $\vec{E}^*(r)$ также является решением (87). Более того, если $\vec{E}(r) = \vec{f}(r) e^{ik_{Bl}r}$,

то $\vec{E}^*(r) = \vec{f}^*(r)e^{-ik_{\text{вп}}r}$ есть не что иное, как решение, распространяющееся в противоположном направлении. Аналогично для вектора $\vec{D}(r)$. Таким образом, если $\vec{E}(r)$ и $\vec{D}(r)$ описывают распределение поля в волне, распространяющейся вперед, то $\vec{E}^*(r)$ и $\vec{D}^*(r)$ описывают распределение поля в волне, распространяющейся назад. При этом в силу линейной связи макроскопического и локального поля (3) несложно заметить, что $(\vec{E})^* = \overline{(\vec{E}^*)}$ (аналогично для поля $(\vec{D})^* = \overline{(\vec{D}^*)}$). Таким образом, равенство $\vec{D} = \varepsilon_{\text{eff}} \vec{E}$ для волны, распространяющейся в прямом направлении, влечет равенство $\overline{(\vec{D}^*)} = (\vec{D})^* = (\varepsilon_{\text{eff}} \vec{E})^* = \varepsilon_{\text{eff}}^* (\vec{E})^* = \varepsilon_{\text{eff}}^* \overline{(\vec{E}^*)}$. Иными словами, для двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях, эффективные диэлектрические проницаемости являются комплексно сопряженными величинами (вывод для эффективных магнитных проницаемостей может быть произведен аналогично).

Поскольку по ранее сделанному предположению киральность равна нулю, то следует предположить, что для двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях, среда должна быть одинакова, то есть должно быть выполнено $\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_{\text{eff}}^*$, и ε_{eff} — чисто действительная величина. Таким образом, приходим к важному выводу: учет в ε_{eff} или μ_{eff} мнимой добавки (связанной с геометрией включений, пространственной дисперсией на ячейке и др.) является превышением точности введения эффективных параметров.

Обобщение Рытова на трехмерный случай. Подход Аше. Аналогичный подход был предложен группой Аше [174]. Единственное отличие было в методе усреднения полей и, соответственно, в определении эффективных параметров

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\langle B_x \rangle_{xyz}}{\langle H_x \rangle_{xy}} \text{ и } \varepsilon_{\text{eff}} = \frac{\langle D_z \rangle_{xy}}{\langle E_z \rangle_{xyz}}.$$

Походы Смита–Пендри и Аше дают хорошее согласие со статическими эффективными параметрами (также как и рытовский подход), однако, учет членов порядка $k_{eff}d$ может привести к ошибочным результатам. Так же, как и Рытов, они рассматривают бесконечную среду, и применение этих эффективных параметров для описания конечных образов требует введения дополнительных граничных условий.

Обобщение Рытова на трехмерный случай. Подход Сильвериньи. Аналогичный рассмотренным ранее работам Рытова, Смита и Аше подход был предложен Сильвериньи [175] (отметим, что в его работах плоская волна записывается в виде $Ae^{i\omega t - ikr}$, но для единства изложения будем, как и раньше, следовать записи $Ae^{-i\omega t + ikr}$, поэтому следующие формулы отличаются знаками у ω, k в сравнении с приведенными ссылками). Сильвериньи рассматривает бесконечную периодическую систему и, так же как и Рытов, проводит усреднение объема ячейки. Однако в работах Сильвериньи есть ряд отличий:

1. В качестве первоначальной системы микроскопических уравнений Максвелла он использует уравнения Максвелла в форме Ландау, в то время как Рытов рассматривал уравнения Максвелла в форме Казимира. Гомогенизированные поля описываются также уравнениями Максвелла в форме Казимира.
2. Усреднению подлежат не поля, а периодический предблеховский множитель.

Поскольку рассматриваемая среда периодическая и бесконечная, решением в ней является блеховская волна

$$E(r) = \alpha(r)e^{ikr}, \quad B(r) = \beta(r)e^{ikr} \quad \text{и} \quad j(r) = \gamma(r)e^{ikr},$$

где $\alpha(r), \beta(r), \gamma(r)$ – периодические функции.

Введем, следуя Сильвериньи, макроскопические поля и токи как

$$\langle E \rangle = \frac{1}{V_{cell}} \int E(r) e^{-ikr} dr = \frac{1}{V_{cell}} \int \alpha(r) dr,$$

$$\langle B \rangle = \frac{1}{V_{cell}} \int B(r) e^{-ikr} dr = \frac{1}{V_{cell}} \int \beta(r) dr$$

$$\text{и } \langle J \rangle = \frac{1}{V_{cell}} \int J(r) e^{-ikr} dr = \frac{1}{V_{cell}} \int \gamma(r) dr,$$

где интегрирование производится по объему ячейки.

Отметим, что такое определение макроскопических полей можно рассматривать не как усреднение, а как аналог фурье-преобразования при волновом векторе, равном блоховскому волновому вектору. Единственное отличие от настоящего фурье-преобразования – конечность объема интегрирования, но можно мысленно объединить много ячеек в одну большую, при этом средние величины не изменятся, так как интеграл берется от периодической функции. Поэтому так же, как и для настоящего фурье-преобразования¹⁹,

$$\langle \nabla \times E \rangle = ik \times \langle E \rangle.$$

Следовательно, получившиеся поля также будут удовлетворять фурье-образам уравнений Максвелла, в частности,

$$k \times \langle E \rangle = \omega \langle B \rangle.$$

Уравнение на эффективную диэлектрическую проницаемость примет вид:

$$\hat{\epsilon}_{eff} \langle E \rangle = \langle E \rangle + 4\pi \langle P \rangle,$$

где $\langle P \rangle$ содержит все токи, в том числе токи, формирующие магнитный момент.

Таким образом, приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} -k \times \langle E \rangle + \omega \langle B \rangle &= 0 \\ \omega \hat{\epsilon}_{eff}(\omega, k) \langle E \rangle + k \times \langle B \rangle &= 0 \end{aligned}$$

¹⁹ С формальной точки зрения

$$\begin{aligned} \langle \nabla \times E \rangle &= \int (\nabla \times E) e^{-ikr} dr = \int \nabla \times (\alpha(r) e^{ikr}) e^{-ikr} dr = \int (\nabla \times \alpha(r) + ik \times \alpha(r)) dr = \\ &= \int_S \alpha(r) ds + ik \int \alpha(r) dr = ik \times \langle E \rangle \end{aligned}$$

Все интегралы, кроме интеграла с индексом S , берутся по объему ячейки, а интеграл с индексом S – по поверхности от периодической функции, то есть равен нулю.

Эта система имеет нетривиальное решение (относительно пары $\langle E \rangle, \langle B \rangle$) только когда соответствующий детерминант равен нулю, что дает условие на $\hat{\varepsilon}_{eff}(\omega, k)$.

Разделение магнитной и электрической задачи (Вуд, Ашкрофт, Дата, Крохин и другие). Другим путем пошли Лэмб-Вуд-Ашкрофт, Дата [176, 177] и многие современные исследователи (см. [178] и др.), которые подразумевают, что в отсутствие магнитных компонент можно положить $\mu_{eff} = 1$ и таким образом определить эффективную проницаемость через волновой (блоховский) вектор $k_{eff} = k_0 \sqrt{\varepsilon_{eff}}$. По сути, такой подход эквивалентен тому, что из статики в динамику переносится независимость магнитного и электрического полей (то есть проводятся независимые усреднения магнитной и диэлектрической проницаемостей).

Впоследствии противоречия этих подходов, как между собой, так и экспериментальным данным, привели к осознанию невозможности описания в динамике эффективных сред с помощью максвелловских граничных условий [179]. В качестве выхода из сложившейся ситуации была предпринята попытка ввести дополнительный параметр путем рассмотрения не-максвелловских граничных условий в форме Друде [180]. Однако при некотором успехе и этот путь не обладает достаточной общностью, и поиск надлежащей теории гомогенизации продолжается.

Гомогенизация случайных сред (подход Татарского-Филькинберга и др.) Отметим в связи с этим подход Татарского-Филькинберга [181-185] и др. Этот подход основан на определении эффективной диэлектрической проницаемости с помощью средних по ансамблю полей

$$\langle D(\omega, k) \rangle = \varepsilon_{eff}(\omega, k) \langle E(\omega, k) \rangle.$$

Применим данный подход к слоистой среде, образованной слоями с одинаковым импедансом (для простоты примем импеданс равным единице, это означает, что в среде есть μ , отличные от 1). При этом слои могут обладать разными показателями преломления, в частности, разными диэлектрическими

проницаемостями. Поскольку $Z=1$, то поле в среде имеет вид $E=e^{i\varphi(x)}$, где $\varphi(x)$ – оптическая толщина от начала образца до точки x . Поскольку образец случайный, то $\varphi(x)$ является суммой случайных величин – оптических толщин отдельных слоев, – и в соответствии с теоремой Ляпунова при больших x $\varphi(x)$ имеет гауссово распределение. Функция распределения $\varphi(x)$ выглядит

следующим образом $f_\varphi(\alpha, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\alpha - \frac{x}{d}\langle\alpha\rangle\right)^2}{2\sigma^2}}$, где d – толщина одного слоя

($x/d = N$ – число слоев), $\langle\alpha\rangle$ – средняя по ансамблю оптическая толщина одного

слоя, $\sigma = \frac{x}{d}\sigma_0$, где σ_0 – дисперсия распределения оптического пути на одном

слое (численный расчет показывает, что при равномерном распределении оптических толщин на одном слое достаточно взять четыре слоя, чтобы отклонение функции распределения от Гаусса не превышало 1%). В итоге получим:

$$\langle E(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varphi(\alpha, x) e^{i\alpha} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\alpha - \frac{x}{d}\langle\alpha\rangle\right)^2}{2\sigma^2}} e^{i\alpha} d\alpha = e^{i\langle\alpha\rangle\frac{x}{d} - \frac{\sigma_0^2 x}{2d}}, \text{ то есть среднее по}$$

ансамблю поле экспоненциально затухает, что связано со стохастизацией фазы (см. рисунок 81). В то же время в каждой отдельной реализации из-за отсутствия отражения ослабления поля не происходит. При этом также экспоненциально затухает $\langle D(x) \rangle$ (см. рисунок 81). Оказывается, что $\langle D(x) \rangle = \text{const} \langle E(x) \rangle$ (см. рисунок 82), следовательно $\langle D(k) \rangle = \text{const} \langle E(k) \rangle$. Причем const содержит мнимую часть, что указывает на невозможность гомогенизовать систему достаточно большого размера ($\lambda/\text{Im}\sqrt{\text{const}}$), но любая отдельная реализация гомогенизуется при любой толщине.

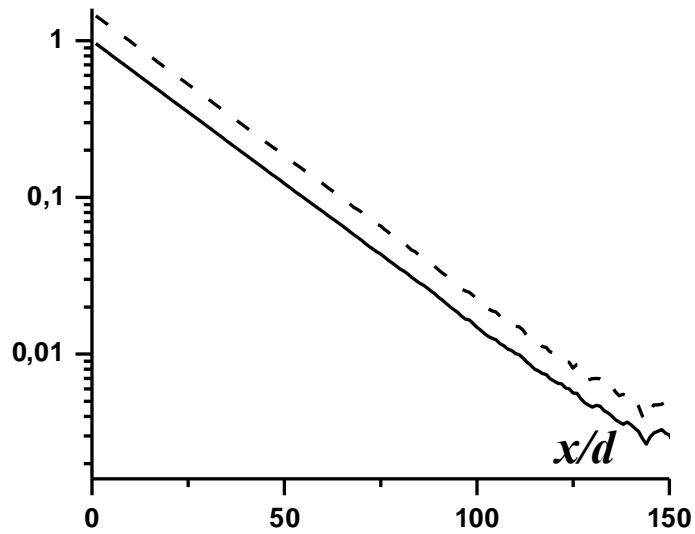


Рисунок 81 – Средние по ансамблю $\langle E(x) \rangle$ (сплошная кривая) и $\langle D(x) \rangle$ (пунктир).

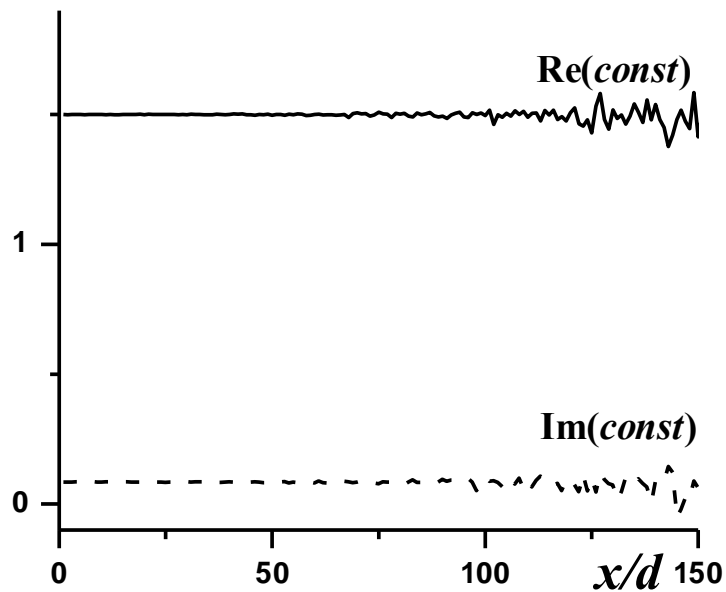


Рисунок 82 – Зависимость $const(x) = \langle D(x) \rangle / \langle E(x) \rangle$, сплошная кривая – действительная часть, пунктир – мнимая часть.

Резюмируя полученные выше результаты, можно сказать, что введение эффективной диэлектрической и магнитной проницаемостей для описания одномерных сред возможно только в квазистатическом пределе $d \ll L \ll \lambda$,

когда работают статические формулы смешения, например, при нормальном падении $\varepsilon_{eff} = \langle \varepsilon \rangle$, $\mu_{eff} = \langle \mu \rangle$.

Теория эффективной среды. Первый шаг в известном подходе ТЭС – это получение выражения поляризуемости частицы в окружающей среде, чтобы описать взаимодействия в эффективной среде. В зависимости от вида теории эффективной среды, свойства окружающей среды могут меняться: это может быть матрица, для аппроксимации Максвелла-Гарнетта [186, 187], или эффективная среда, для аппроксимации Бруггемана [188]. Для частного случая слоистой структуры можно показать, что различные подходы теории эффективной среды приводят к одним и тем же выражениям эффективных параметров. При аппроксимации Бруггемана для двойного композита, состоящего из материала 1 и материала 2, простой способ вычислить эффективные параметры – это вычислить поляризуемость частиц материалов 1 и 2 в эффективной среде и затем предположить, что эффективная среда является гомогенной. Для эллипсоида из материала i с магнитной проницаемостью μ_i и поляризуемостью p_i , окруженного эффективной средой с магнитной проницаемостью $\tilde{\mu}$, поляризованной внешним полем H_0 , выражение для поляризуемости имеет вид:

$$p_i = \frac{\mu_i - \tilde{\mu}}{\tilde{\mu} + L(\mu_i - \tilde{\mu})}, \quad (24)$$

где L – геометрический коэффициент деполяризации: $L=0$ для бесконечной плоскости, поляризованной параллельно самой себе, и $L=1$, если поляризующее поле перпендикулярно плоскости.

Согласно методу эффективной среды,

$$qp_1 + (1-q)p_2 = 0, \quad (25)$$

где q – объемная часть материала 1.

Некорректность учета поправок к статическим формулам при распространении перпендикулярно слоям. В данном разделе вновь вернемся к исследованию периодической слоистой среды. Отметим, что формулы, полученные Рытовым, предсказывают результаты, затрудняющие их физическую интерпретацию: даже

для чисто действительных локальных значений диэлектрической проницаемости ε_{eff} и μ_{eff} являются комплексными величинами. Более того, либо ε_{eff} либо μ_{eff} имеет отрицательную мнимую часть.

Для того чтобы придать физический смысл каждой из восприимчивостей и отождествить отрицательную мнимую часть, скажем, для определенности, у μ_{eff} , с усилением излучения, необходимо поместить образец в пучность магнитного поля, где величиной электрического поля можно пренебречь. Такой эксперимент можно провести лишь с конечной системой, а не с бесконечной, рассмотренной Рытовым.

Рассмотрим конечную систему. Эффективные параметры определялись в ходе численного эксперимента согласно волноводному методу [189]. При этом величины ε и μ определяются по коэффициентам прохождения t и отражения r падающей волны²⁰ [190]. Предположив, что образец состоит из однородного материала с показателем преломления $n_{eff} = k_{eff}/k_0 = \sqrt{\varepsilon_{eff}\mu_{eff}}$ и характеристическим адмитансом $Y_{eff} = \sqrt{\varepsilon_{eff}/\mu_{eff}} = 1/Z_{eff}$, где Z_{eff} – характеристический импеданс, для нормального падения плоской волны имеем

$$Y_{eff} = \sqrt{\frac{(1-r)^2 - t^2}{(1+r)^2 - t^2}}, \quad e^{ik_{eff}Nd} = \frac{t(1 + 1/Z_{eff})}{1/Z_{eff} + r/Z_{eff} + 1 - r}, \quad (88)$$

и $\mu_{eff} = k_{eff}/(Y_{eff}k_0)$, $\varepsilon_{eff} = k_{eff}Y_{eff}/k_0$.

По отношению к изменению направления падения волны на противоположное для периодической системы существует два принципиально разных случая: количество слоев четно (целое число периодов, система несимметрична); количество слоев нечетно (полуцелое число периодов, система симметрична).

²⁰ Так как изучаются оптически толстые образцы, то не рассматривается классический метод короткого замыкания – холостого хода, дающий надежные результаты лишь при оптической толщине порядка одной пятой длины волны.

В случае, когда число слоев чётно, симметрия задачи не позволяет корректно ввести эффективные параметры, и получаемые в ходе численного эксперимента значения зависят от размера системы: $n_{eff} = k_{eff} / k_0$ (см. рисунок 83) стремится к $n_{eff}^{Ryt} = k_{eff}^{Ryt} / k_0$ при увеличении размера системы, а Y_{eff} осциллирует с периодом $0.5\lambda_{eff} = \pi / k_{eff}$ (см. рисунок 84). Величины ε_{eff} и μ_{eff} , будучи функциями как n_{eff} , так и Y_{eff} , проявляя комбинированное поведение, не стремятся к какому либо пределу при $L \rightarrow \infty$.

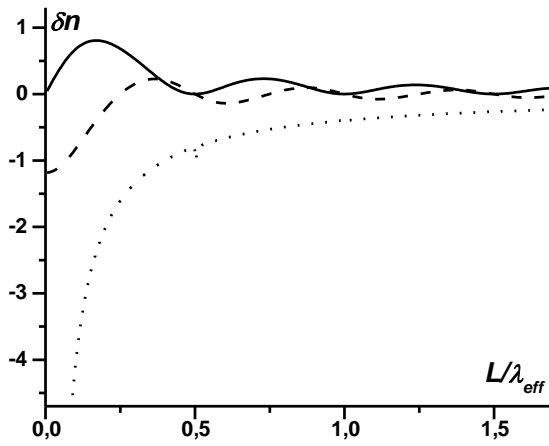


Рисунок 83 – Зависимость

$\delta n = n_{eff} - n_{eff}^{Ryt}$ от толщины системы.

Сплошная кривая – $\text{Re}(\delta n)$, пунктир

– $\text{Im}(\delta n)$ для четного случая,

точечная кривая – δn для нечетного

случая. Параметры:

$$\varepsilon_1 = 2, \varepsilon_2 = 3, k_0 d = 0.01.$$

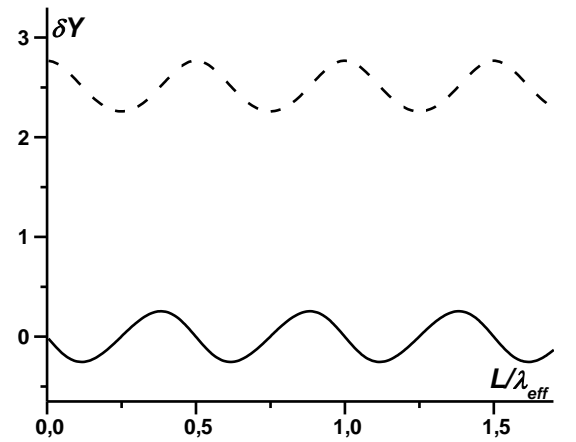


Рисунок 84 – Зависимость

$\delta Y = Y_{eff} - Y_{eff}^{Ryt}$ от толщины системы.

Сплошная кривая – $\text{Re}(\delta Y)$,

пунктир – $\text{Im}(\delta Y)$ для четного

случая. Параметры:

$$\varepsilon_1 = 2, \varepsilon_2 = 3, k_0 d = 0.01.$$

В случае, когда число слоев нечётно, n_{eff} действителен и стремится к рывтовскому значению $n_{eff} - n_{eff}^{Ryt} \sim d / L$ (см. рисунок 83). Y_{eff} также действителен, но в отличие от n_{eff} испытывает периодические всплески различной амплитуды (см. рисунок 85). Амплитуда всплесков не затухает с ростом L . Следствием такого

поведения Y_{eff} является то, что ε_{eff} и μ_{eff} могут сколь угодно отличаться от рытовского решения.

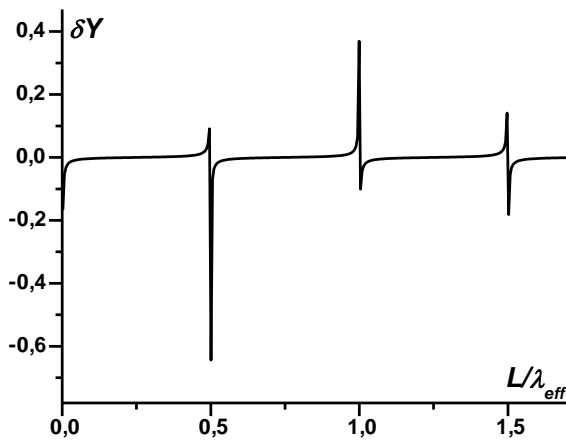


Рисунок 85 – Зависимость $\delta Y = Y_{eff} - Y_{eff}^{Ryt}$ от толщины системы. Параметры: $\varepsilon_1 = 2, \varepsilon_2 = 3, k_0 d = 0.01$.

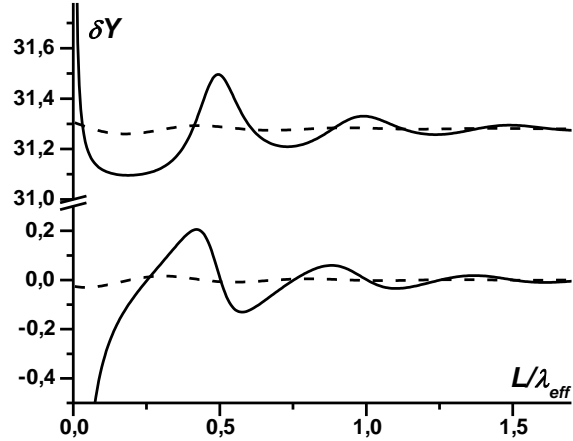


Рисунок 86 – Зависимость $\delta Y = (Y_{eff} - Y_{eff}^{Ryt}) * 100$ от толщины системы. Сплошная кривая – $\text{Re}(\delta Y)$, пунктир – $\text{Im}(\delta Y)$. Верхний график для нечетного случая, нижний – для четного. Параметры: $\varepsilon_1 = 2 + 0.1i, \varepsilon_2 = 3 + 0.1i, k_0 d = 0.01$.

Если возможно локальное поглощение энергии, величина пиков Y_{eff} , которые наблюдались в случае нечетного числа слоев, уменьшается с толщиной образца, а сам Y_{eff} стремится к некоторому значению, отличному от рытовского (см. рисунок 86). Предельное значение Y_{eff} достигается на толщине, когда образец становится непрозрачным, и Y_{eff} становится, как видно из (88), равным входному адмитансу.

Для случайных систем численный эксперимент показал, что $n_{eff}(L)$ самоусредняется и стремится к некому пределу с ростом размера системы.

Характеристический адмитанс, и, как следствие, эффективные параметры не самоусредняются, и их значения при любом способе усреднения имеют неограниченный разброс при изменении толщины образца.

В рамках теории возмущения по $k_0 d$ результаты численного эксперимента были подтверждены.

С точностью до первого порядка по $k_0 d$ в четном случае имеем

$$T = T_1 + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin(k_{eff}^{Ryt} L)}{4\sqrt{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)/2}} k_0 d \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

где T_1 – это Т-матрица однородного слоя с проницаемостью $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$ и толщины L . Заметим, что пропорциональная $k_0 d$ поправка симметрична, что делает заведомо невозможным придать Т-матрице четного случая вид Т-матрицы однородного слоя с какими-либо эффективными параметрами.

Симметрия Т-матрицы для нечетного случая позволяет ввести эффективные Y_{eff} и k_{eff} . С точностью $k_0 d$ они равны:

$$\begin{aligned} (Y_{eff}^{Odd})^2 &= \langle \varepsilon \rangle + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2} \sqrt{\langle \varepsilon \rangle} \operatorname{ctg}(k_{eff}^{Ryt} L) k_0 d, \\ \cos(k_{eff}^{Odd} L) &= \cos(k_{eff}^{Ryt} L) - \frac{(\varepsilon_2 + 3\varepsilon_1) \sin(k_{eff}^{Ryt} L)}{4\sqrt{\langle \varepsilon \rangle}} k_0 d. \end{aligned}$$

Как видно, эффективные Y_{eff} и k_{eff} зависят от толщины образца. Наиболее ярко эта зависимость проявляется вблизи области прозрачности $k_{eff}^{Ryt} L = \pi l$, $l = 0, 1, 2, \dots$, где ε_{eff} и μ_{eff} достигают сколь угодно больших значений (см. рисунок 85).

Резюмируя полученные выше результаты, можно сказать, что введение ε_{eff} и μ_{eff} для описания одномерных сред возможно только в квазистатическом пределе $d \ll L \ll \lambda$, когда работают статические формулы смещения, например при нормальном падении $\varepsilon_{eff} = \langle \varepsilon \rangle$, $\mu_{eff} = \langle \mu \rangle$.

Отклонение в композитных материалах законов преломления от френелевских

Рассмотрим бесконечный слой, диэлектрическая проницаемость в котором периодична вдоль оси, параллельной его поверхности. Волна падает перпендикулярно поверхности образца, вектор E направлен вдоль поверхности и перпендикулярно оси неоднородности образца (см. рисунок 87).

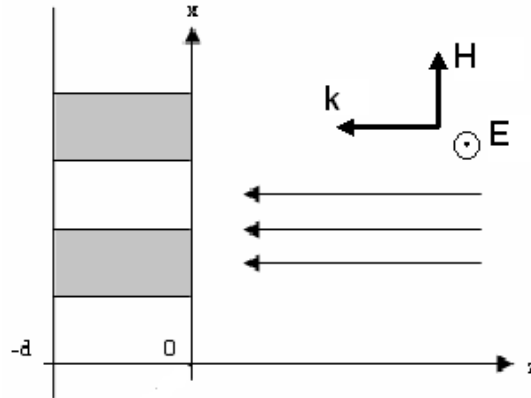


Рисунок 87 – Схема структуры.

В случае распространения волн неоднородный материал удобнее описывать не в терминах $\varepsilon_{эфф}$ и $\mu_{эфф}$, а в терминах эффективного показателя преломления $n_{эфф}$ и эффективного адмиттанса $Y_{эфф}$ (эффективные проницаемости можно определить посредством $\varepsilon_{эфф} = n_{эфф} Y_{эфф}$, $\mu_{эфф} = n_{эфф} / Y_{эфф}$).

Заметим, что в статике уравнения Максвелла делятся на две группы: первая описывает электрические поля \vec{E}, \vec{D} , вторая — магнитные \vec{H}, \vec{B} , и задача гомогенизации естественным образом делится на две отдельных задачи по нахождению эффективных $\varepsilon_{эфф}$ и $\mu_{эфф}$. В случае распространения волн такого разделения нет, локальная диэлектрическая и локальная магнитная проницаемость совместно влияют на распространение волны. В тоже время, прохождение волны через слой вещества связано с двумя явлениями: с рассеянием на границах и с прохождением волны по объему. При нормальном падении преломление на границе описывается адмиттансом, а распространение — волновым числом или коэффициентом преломления (в случае периодической

среды – блоховским волновым вектором $k_{Бл} = k_0 n_{эфф}$). Таким образом, для нахождения $Y_{эфф}$ необходимо просто рассмотреть рассеяние на полупространстве, а для нахождения $n_{эфф}$ достаточно найти волновой вектор распространяющейся моды.

Используя такой подход, определим $Y_{эфф}$ и $n_{эфф}$. Для этого сначала решим в рамках теории возмущений (параметром малости выступает отношение периода структуры к длине волны) задачу рассеяния плоской волны на полупространстве, заполненном модельным композитом (слоистой структурой) (см. рисунок 88). По коэффициенту отражения r определим величину эффективного адмитанса $Y_{эфф}$, а решив бесконечную задачу, найдем волновой вектор $k_{Бл}$ распространяющейся моды и восстановим эффективный коэффициент преломления $n_{эфф}$. Затем протестируем полученные таким образом эффективные параметры, решая задачу о прохождении волны через конечный слой модельного композита. Для этого сравним (в заданном порядке теории возмущений) коэффициенты прохождения и отражения для однородного слоя, полученные по формулам Френеля, используя ранее полученные в задаче о полупространстве $Y_{эфф}$ и $n_{эфф}$, с коэффициентами для неоднородного слоя, полученными прямым решением задачи.

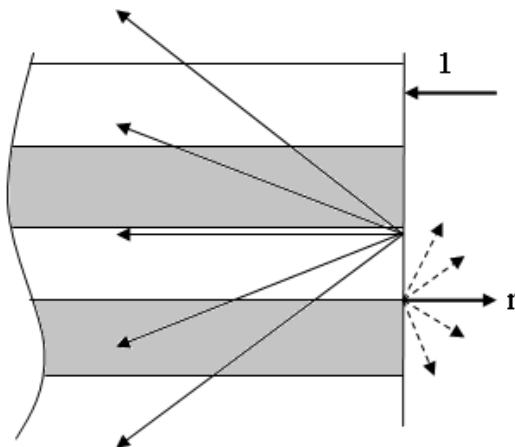


Рисунок 88 – Рассматриваемая периодическая система представляет совокупность чередующихся слоев, заполняющих полупространство. Вне слоя имеются распространяющиеся волны – падающая и отраженная, содержащая как

распространяющиеся так и экспоненциально затухающиеся волны (дифракционные лепестки). Внутри образца распространяются блоховские волны, состоящие из плоских гармоник, причем блоховский вектор центральной гармоники перпендикулярен векторам обратной решетки.

Собственные решения. Рассмотрим бесконечный в плоскости (x, y) образец, имеющий вдоль оси z толщину d . Диэлектрическая проницаемость образца периодична по оси x (рассматриваются два случая: непрерывный и дискретный); координаты его границ $z = 0$ и $z = -d$, волна падает в направлении, противоположном оси z , вектор E направлен вдоль оси y (см. рисунок 88).

Для начала найдем собственные решения уравнений Максвелла в слоистой безграничной среде. В двумерном случае для ТЕ поляризации задача сводится к скалярной [191]:

$$\Delta E_y + k_0^2 \varepsilon(x) E_y = 0,$$

с чётной периодической диэлектрической проницаемостью

$$\begin{aligned} 1. \varepsilon(x) &= \varepsilon_{01} + \tilde{\varepsilon}_1 \cos(k_\varepsilon x), \\ 2. \varepsilon(x) &= \begin{cases} \varepsilon_1, & x \in [-\lambda_\varepsilon / 2, -\lambda_\varepsilon / 4] \cup [\lambda_\varepsilon / 4, \lambda_\varepsilon / 2] \\ \varepsilon_2, & x \in [-\lambda_\varepsilon / 4, \lambda_\varepsilon / 4] \end{cases} \end{aligned}$$

(Введем обозначения для дискретного случая $\varepsilon_{02} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, $\tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$.) В силу независимости коэффициентов от z решение ищем в виде произведения двух функций $E(x, z) = X(x)Z(z)$ [191]. Получим

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} X(x) + [k_0^2 \varepsilon(x) + \alpha^2] X(x) = 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} Z(z) - \alpha^2 Z(z) = 0 \end{cases}, \quad (88)$$

где α – константа разделения. Из второго уравнения получаем:

$$Z(z) = A_1 \exp(\alpha z) + A_2 \exp(-\alpha z).$$

В силу периодичности диэлектрической проницаемости вдоль оси x решение $X(x)$ также ищем периодическое, представляя его в виде ряда Фурье (см. рисунок 89):

$$X(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_l \exp(-ik_\varepsilon lx), \quad k_\varepsilon = 2\pi / \lambda_\varepsilon. \quad (89)$$

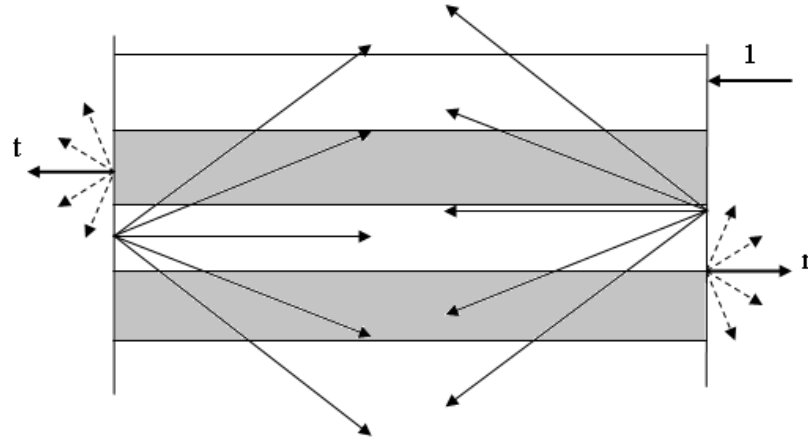


Рисунок 89 – Схема и вид решения задачи для слоя. Вне слоя имеются распространяющиеся волны: падающая, отраженная и прошедшая, – содержащие как распространяющиеся, так и экспоненциально затухающие волны (дифракционные лепестки). Внутри образца существуют блоховские волны, порожденные падающей волной и отраженные от второй границы слоя.

Фактически, рассматривается одномерный фотонный кристалл, но распространение идет вдоль слоев. Это означает, что α с точностью до множителя, равного мнимой единице, равна блоховскому вектору. Особенностью задачи является то, что все вектора обратной решетки перпендикулярны блоховскому вектору. В зависимости от знака α^2 блоховские волны являются распространяющимися или экспоненциально затухающими.

После подстановки ряда (89) в уравнение (88) и представления диэлектрической проницаемости в виде $\varepsilon(x) = \sum_l \delta_l \exp(-ik_\varepsilon lx)$

$$(\varepsilon_c(x) = \varepsilon_{01} + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_1 \exp(ik_\varepsilon x) + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_1 \exp(-ik_\varepsilon x),$$

$$\varepsilon_d(x) = \varepsilon_{02} + \sum_j \frac{1}{\pi(2j+1)} (-1)^j \tilde{\varepsilon}_2 \exp(-ik_\varepsilon (2j+1)x), \quad \text{получаем задачу на}$$

собственные значения α [191]:

$$\begin{aligned}
k_\varepsilon^2 l^2 \beta_l - \sum_p k_0^2 \delta_p \beta_{l-p} &= \alpha^2 \beta_l \\
D_{ml} \beta_l = \alpha^2 \beta_m &\begin{cases} D_{jj} = k_\varepsilon^2 j^2 - k_0^2 \varepsilon_0 \\ D_{j, j-(2q+1)} = -k_0^2 \delta_{2q+1} \\ D_{j, j-2q} = 0 \end{cases} .
\end{aligned} \quad (90)$$

При рассмотрении ограниченного образца, решения внутри образца ($-d < z < 0$) будем искать как линейную комбинацию собственных решений бесконечной задачи, причем будем учитывать как распространяющиеся волны, так и экспоненциально затухающие.

$$\begin{aligned}
E_y(x, z) &= \sum_\nu \left\{ [A_1^{(\nu)} \exp(\alpha_\nu z) + A_2^{(\nu)} \exp(-\alpha_\nu z)] \cdot \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_l^{(\nu)} \exp(-ik_\varepsilon l x) \right\} \\
H_x(x, z) &= \sum_\nu \left\{ [i \frac{\alpha_\nu}{k_0} A_1^{(\nu)} \exp(\alpha_\nu z) - i \frac{\alpha_\nu}{k_0} A_2^{(\nu)} \exp(-\alpha_\nu z)] \cdot \sum_l \beta_l^{(\nu)} \exp(-ik_\varepsilon l x) \right\}
\end{aligned}$$

Поля вне образца, наряду с центральными прошедшей и отраженной гармониками, будут содержать прошедшие через и отраженные от рассматриваемого образца дополнительные гармоники (дифракционные лепестки) [191], причем в рассматриваемом случае частой решетки все боковые лепестки экспоненциально затухающие ($K_l^2 = k_0^2 - k_\varepsilon^2 l^2 < 0$):

$$\begin{aligned}
E_y(x, z) &= \begin{cases} \exp(-ik_0 z) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \gamma_1^{(l)} \exp(-ik_\varepsilon l x + iK_l z), & z > 0 \\ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \gamma_2^{(l)} \exp(-ik_\varepsilon l x - iK_l z), & z < -d \end{cases} , \\
H_x(x, z) &= \begin{cases} \exp(-ik_0 z) + \sum_l (-\frac{K_l}{k_0}) \gamma_1^{(l)} \exp(-ik_\varepsilon l x + iK_l z), & z > 0 \\ \sum_l \frac{K_l}{k_0} \gamma_2^{(l)} \exp(-ik_\varepsilon l x - iK_l z), & z < -d \end{cases} ,
\end{aligned}$$

где $\gamma_1^{(0)} = r$, $\gamma_2^{(0)} = t$ – коэффициенты отражения и прохождения соответственно.

Сшивая поля на границе образца, получаем систему линейных уравнений для амплитуд:

$l = 0$:

$$\begin{cases} \sum_{\nu} [A_1^{(\nu)} + A_2^{(\nu)}] \cdot \beta_0^{(\nu)} = 1 + \gamma_1^{(0)} & (npu \ z = 0) \\ \gamma_2^{(0)} \exp(ik_0 d) = \sum_{\nu} [A_1^{(\nu)} \exp(-\alpha_{\nu} d) + A_2^{(\nu)} \exp(\alpha_{\nu} d)] \cdot \beta_0^{(\nu)} & (npu \ z = -d) \\ \sum_{\nu} i \frac{\alpha_{\nu}}{k_0} [A_1^{(\nu)} - A_2^{(\nu)}] \cdot \beta_0^{(\nu)} = 1 - \gamma_1^{(0)} & (npu \ z = 0) \\ \gamma_2^{(0)} \exp(ik_0 d) = \sum_{\nu} i \frac{\alpha_{\nu}}{k_0} [A_1^{(\nu)} \exp(-\alpha_{\nu} d) - A_2^{(\nu)} \exp(\alpha_{\nu} d)] \cdot \beta_0^{(\nu)} & (npu \ z = -d) \end{cases}$$

$l \neq 0$:

$$\begin{cases} \sum_{\nu} [A_1^{(\nu)} + A_2^{(\nu)}] \cdot \beta_l^{(\nu)} = \gamma_1^{(l)} & (npu \ z = 0) \\ \gamma_2^{(l)} \exp(iK_l d) = \sum_{\nu} [A_1^{(\nu)} \exp(-\alpha_{\nu} d) + A_2^{(\nu)} \exp(\alpha_{\nu} d)] \cdot \beta_l^{(\nu)} & (npu \ z = -d) \\ \sum_{\nu} i \frac{\alpha_{\nu}}{k_0} [A_1^{(\nu)} - A_2^{(\nu)}] \cdot \beta_l^{(\nu)} = -\frac{K_l}{k_0} \gamma_1^{(l)} & (npu \ z = 0) \\ \frac{K_l}{k_0} \gamma_2^{(l)} \exp(iK_l d) = \sum_{\nu} i \frac{\alpha_{\nu}}{k_0} [A_1^{(\nu)} \exp(-\alpha_{\nu} d) - A_2^{(\nu)} \exp(\alpha_{\nu} d)] \cdot \beta_l^{(\nu)} & (npu \ z = -d) \end{cases}.$$

Напомним, что предполагаемая длина падающей волны много больше периода изменения диэлектрической проницаемости образца. Поэтому в задаче появляется малый параметр $\tau \ll 1$ ($\tau_1 = k_0(\tilde{\varepsilon}_1)^{1/2} / k_{\varepsilon}$, $\tau_2 = k_0 / k_{\varepsilon}$), в разложении по степеням которого будем искать решение.

Примечательно, что рассмотрение вместо бесконечной системы (90) конечной с $l \leq n$ эквивалентно рассмотрению ряда теории возмущения с точностью до τ^{2n} . Рассмотрение усеченной матрицы большего размера вносит поправку в решения только начиная с порядка τ^{2n+2} . Проиллюстрируем это утверждение на примере детерминанта матриц (3×3) и (5×5) . Если вынести множитель k_{ε}^2 , то матрицы будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -b\tau^2 + 1 & -c\tau^2 & 0 \\ -c\tau^2 & -b\tau^2 & -c\tau^2 \\ 0 & -c\tau^2 & -b\tau^2 + 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b\tau^2 + 4 & -c\tau^2 & 0 & a\tau^2 & 0 \\ -c\tau^2 & -b\tau^2 + 1 & -c\tau^2 & 0 & a\tau^2 \\ 0 & -c\tau^2 & -b\tau^2 & -c\tau^2 & 0 \\ a\tau^2 & 0 & -c\tau^2 & -b\tau^2 + 1 & -c\tau^2 \\ 0 & a\tau^2 & 0 & -c\tau^2 & -b\tau^2 + 4 \end{pmatrix}.$$

Их детерминанты Δ_3 и Δ_5 есть полиномы от τ^2 , связанные следующим соотношением:

$$\Delta_5 = (-b\tau^2 + 4)^2 \Delta_3 + 2(-b\tau^2 + 4) \{2ac^3\tau^8 - (a^2 + c^2)\tau^4\} \begin{vmatrix} -b\tau^2 + 1 & -c\tau^2 \\ -c\tau^2 & -b\tau^2 \end{vmatrix} + (-a^2 + c^2)\tau^4 \begin{vmatrix} -c\tau^2 & -c\tau^2 & a\tau^2 \\ 0 & -b\tau^2 & 0 \\ a\tau^2 & -c\tau^2 & -c\tau^2 \end{vmatrix},$$

откуда видно, что Δ_5 вносит поправку только начиная с τ^4 . Аналогичные доказательства можно провести для собственных значений и собственных векторов.

Определение эффективного показателя преломления (блеховского волнового вектора), непрерывный случай. Рассмотрим приближение решения до второго порядка τ^2 . В этом случае можно считать, что матрица D имеет размер (3×3) .

$$D_{ml}^{(3)} = \begin{pmatrix} -k_0^2 \varepsilon_{01} + k_\varepsilon^2 & -\frac{1}{2} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_1 & 0 \\ -\frac{1}{2} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_1 & -k_0^2 \varepsilon_{01} & -\frac{1}{2} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_1 \\ 0 & -\frac{1}{2} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_1 & -k_0^2 \varepsilon_{01} + k_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, получаем следующие собственные значения и векторы:

$$\begin{cases} \nu = -1: & \alpha_{-1} = k_\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{01}}{\tilde{\varepsilon}_1} \tau_1^2\right), \quad \vec{\beta}^{(-1)} = \{-\tau_1^2, 0, \tau_1^2\} \\ \nu = 0: & \alpha_0 = ik_0 \varepsilon_{01}^{1/2} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\tilde{\varepsilon}_1}{\varepsilon_{01}} \tau_1^2\right), \quad \vec{\beta}^{(0)} = \{\tau_1^2, 2, \tau_1^2\} \\ \nu = 1: & \alpha_1 = k_\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{01}}{\tilde{\varepsilon}_1} \tau_1^2\right), \quad \vec{\beta}^{(1)} = \{\tau_1^2, 0, \tau_1^2\} \end{cases}$$

В результате получаются две экспоненциально затухающие и одна распространяющаяся волны. Блеховский волновой вектор:

$$k_{Bl}^2 = k_0^2 \left(\varepsilon_{01} + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_1 \tau_1^2 + O[\tau_1^4] \right).$$

Теперь рассмотрим приближение решения до четвёртого порядка τ^4 . В этом случае можно считать, что матрица D имеет размер (5×5) . Выполняя аналогичную последовательность действий, получаем следующие результаты.

$$D_{ml}^{(5)} = \begin{pmatrix} -k_0^2 \varepsilon_{01} + 4k_\varepsilon^2 & -\frac{1}{2} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_1 & -k_0^2 \varepsilon_{01} + k_\varepsilon^2 & -\frac{1}{2} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_1 & -k_0^2 \varepsilon_{01} & -\frac{1}{2} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_1 & -k_0^2 \varepsilon_{01} + k_\varepsilon^2 & -\frac{1}{2} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_1 & -k_0^2 \varepsilon_{01} + 4k_\varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu = -2: \alpha_{-2} = k_\varepsilon (2 - \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_{01}}{\tilde{\varepsilon}_1} \tau_1^2 + [\frac{1}{48} - \frac{1}{64} (\frac{\varepsilon_{01}}{\tilde{\varepsilon}_1})^2] \tau_1^4), \vec{\beta}^{(-2)} = \{-\tau_1^4, 0, 0, 0, \tau_1^4\} \\ \nu = -1: \alpha_{-1} = k_\varepsilon (1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{01}}{\tilde{\varepsilon}_1} \tau_1^2 + [-\frac{1}{24} - \frac{1}{8} (\frac{\varepsilon_{01}}{\tilde{\varepsilon}_1})^2] \tau_1^4), \vec{\beta}^{(-1)} = \{-\frac{1}{6} \tau_1^4, -\tau_1^2, 0, \tau_1^2, \frac{1}{6} \tau_1^4\} \\ \nu = 0: \alpha_0 = ik_0 \varepsilon_{01}^{1/2} (1 + \frac{1}{4} \frac{\tilde{\varepsilon}_1}{\varepsilon_{01}} \tau_1^2 + [-\frac{1}{32} (\frac{\tilde{\varepsilon}_1}{\varepsilon_{01}})^2] \tau_1^4), \vec{\beta}^{(0)} = \{\frac{1}{8} \tau_1^4, \tau_1^2, 2 + \frac{9}{8} \tau_1^4, \tau_1^2, \frac{1}{8} \tau_1^4\} \\ \nu = 1: \alpha_1 = k_\varepsilon (1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{01}}{\tilde{\varepsilon}_1} \tau_1^2 + [\frac{5}{24} - \frac{1}{8} (\frac{\varepsilon_{01}}{\tilde{\varepsilon}_1})^2] \tau_1^4), \vec{\beta}^{(1)} = \{\frac{1}{6} \tau_1^4, \tau_1^2, -\tau_1^4, \tau_1^2, \frac{1}{6} \tau_1^4\} \\ \nu = 2: \alpha_2 = k_\varepsilon (2 - \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_{01}}{\tilde{\varepsilon}_1} \tau_1^2 + [\frac{1}{48} - \frac{1}{64} (\frac{\varepsilon_{01}}{\tilde{\varepsilon}_1})^2] \tau_1^4), \vec{\beta}^{(2)} = \{\tau_1^4, 0, 0, 0, \tau_1^4\} \end{array} \right.$$

Получаются четыре экспоненциально затухающие и одна распространяющаяся волны. Блоховский волновой вектор:

$$k_{Bn}^2 = k_0^2 \left(\varepsilon_{01} + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_1 \tau_1^2 + O[\tau_1^6] \right).$$

Как и следовало ожидать, решения совпадают с точностью до τ^2 .

Определение эффективного показателя преломления (блоховского волнового вектора), дискретный случай. Рассмотрим приближение решения до второго порядка τ^2 . В этом случае можно считать, что матрица D имеет размер (3×3) .

$$D_{ml}^{(3)} = \begin{pmatrix} -k_0^2 \varepsilon_{02} + k_\varepsilon^2 & -\frac{1}{\pi} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2 & 0 \\ -\frac{1}{\pi} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2 & -k_0^2 \varepsilon_{02} & -\frac{1}{\pi} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2 \\ 0 & -\frac{1}{\pi} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2 & -k_0^2 \varepsilon_{02} + k_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, получаем следующие собственные значения и векторы:

$$\begin{cases} \nu = -1: & \alpha_{-1} = k_\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon_{02} \tau_2^2\right), \quad \vec{\beta}^{(-1)} = \{-\tau_2^2, 0, \tau_2^2\} \\ \nu = 0: & \alpha_0 = ik_0(\varepsilon_{02})^{1/2} \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \frac{\tilde{\varepsilon}_2^2}{\varepsilon_{02}} \tau_2^2\right), \quad \vec{\beta}^{(0)} = \left\{\tau_2^2, \frac{\pi}{\tilde{\varepsilon}_2}, \tau_2^2\right\} \\ \nu = 1: & \alpha_1 = k_\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon_{02} \tau_2^2\right), \quad \vec{\beta}^{(1)} = \{\tau_2^2, 0, \tau_2^2\} \end{cases}$$

В результате получаются две экспоненциально затухающие и одна распространяющаяся волны. Блоховский волновой вектор:

$$k_{Bl}^2 = k_0^2 \left(\varepsilon_{02} + \frac{2}{\pi^2} \tilde{\varepsilon}_2^2 \tau_2^2 + O[\tau_2^4] \right).$$

Теперь рассмотрим приближение решения до четвёртого порядка τ^4 . В этом случае можно считать, что матрица D имеет размер (5×5) . Выполняя аналогичную последовательность действий, получаем следующие результаты.

$$D_{ml}^{(5)} = \begin{pmatrix} -k_0^2 \varepsilon_{02} + 4k_\varepsilon^2 & -\frac{1}{\pi} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2 & 0 & \frac{1}{3\pi} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2 & 0 \\ -\frac{1}{\pi} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2 & -k_0^2 \varepsilon_{02} + k_\varepsilon^2 & -\frac{1}{\pi} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2 & 0 & \frac{1}{3\pi} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2 \\ 0 & -\frac{1}{\pi} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2 & -k_0^2 \varepsilon_{02} & -\frac{1}{\pi} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2 & 0 \\ \frac{1}{3\pi} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2 & 0 & -\frac{1}{\pi} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2 & -k_0^2 \varepsilon_{02} + k_\varepsilon^2 & -\frac{1}{\pi} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2 \\ 0 & \frac{1}{3\pi} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2 & 0 & -\frac{1}{\pi} k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2 & -k_0^2 \varepsilon_{02} + 4k_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \nu = -2: \alpha_{-2} = 2k_\varepsilon \left(1 - \frac{1}{8} \varepsilon_{02} \tau_2^2 + \left[-\frac{1}{128} \varepsilon_{02}^2 + \frac{2}{27\pi^2} \tilde{\varepsilon}_2^2\right] \tau_2^4\right), \quad \vec{\beta}^{(-2)} = \{-\tau_2^4, 0, 0, 0, \tau_2^4\} \\ \nu = -1: \alpha_{-1} = k_\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon_{02} \tau_2^2 + \left[-\frac{1}{8} \varepsilon_{02}^2 - \frac{8}{27\pi^2} \tilde{\varepsilon}_2^2\right] \tau_2^4\right), \quad \vec{\beta}^{(-1)} = \left\{-\frac{4}{9\pi} \tilde{\varepsilon}_2 \tau_2^4, -\tau_2^2, 0, \tau_2^2, \frac{4}{9\pi} \tilde{\varepsilon}_2 \tau_2^4\right\} \\ \nu = 0: \alpha_0 = ik_0 \varepsilon_{02}^{1/2} \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \frac{\tilde{\varepsilon}_2^2}{\varepsilon_{02}} \tau_2^2 + \left[-\frac{1}{2\pi^4} \frac{\tilde{\varepsilon}_2^4}{\varepsilon_{02}^2}\right] \tau_2^4\right), \quad \vec{\beta}^{(0)} = \left\{\frac{1}{6\pi} \tilde{\varepsilon}_2 \tau_2^4, \tau_2^2, \frac{\pi}{\tilde{\varepsilon}_2} + \frac{43}{18\pi} \tilde{\varepsilon}_2 \tau_2^4, \tau_2^2, \frac{1}{6\pi} \tilde{\varepsilon}_2 \tau_2^4\right\} \\ \nu = 1: \alpha_1 = k_\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon_{02} \tau_2^2 + \left[-\frac{1}{8} \varepsilon_{02}^2 + \frac{25}{27\pi^2} \tilde{\varepsilon}_2^2\right] \tau_2^4\right), \quad \vec{\beta}^{(1)} = \left\{\frac{2}{9\pi} \tilde{\varepsilon}_2 \tau_2^4, \tau_2^2, -\frac{2}{\pi} \tilde{\varepsilon}_2 \tau_2^4, \tau_2^2, \frac{2}{9\pi} \tilde{\varepsilon}_2 \tau_2^4\right\} \\ \nu = 2: \alpha_2 = 2k_\varepsilon \left(1 - \frac{1}{8} \varepsilon_{02} \tau_2^2 + \left[-\frac{1}{128} \varepsilon_{02}^2 + \frac{1}{54\pi^2} \tilde{\varepsilon}_2^2\right] \tau_2^4\right), \quad \vec{\beta}^{(2)} = \{\tau_2^4, 0, 0, 0, \tau_2^4\} \end{cases}$$

Получаются четыре экспоненциально затухающие и одна распространяющаяся волны. Блоховский волновой вектор:

$$k_{Bl}^2 = k_0^2 \left(\varepsilon_{02} + \frac{2}{\pi^2} \tilde{\varepsilon}_2^2 \tau_2^2 + O[\tau_2^6] \right).$$

Как и следовало ожидать, решения совпадают с точностью до τ^2 .

Отражение от полупространства. Для нахождения $\varepsilon_{эфф}$ и $\mu_{эфф}$ осталось найти адмитанс. Для этого рассмотрим задачу о полупространстве. В таком случае внутри образца нет отражённых волн, следовательно:

$$l = 0:$$

$$\sum_{\nu} A_2^{(\nu)} \cdot \beta_0^{(\nu)} = 1 + \gamma_1^{(0)} \quad (\text{при } z = 0)$$

$$\sum_{\nu} (-i \frac{\alpha_{\nu}}{k_0} A_2^{(\nu)}) \cdot \beta_0^{(\nu)} = 1 - \gamma_1^{(0)} \quad (\text{при } z = 0)$$

$$l \neq 0:$$

$$\sum_{\nu} A_2^{(\nu)} \cdot \beta_l^{(\nu)} = \gamma_1^{(l)} \quad (\text{при } z = 0)$$

$$\sum_{\nu} (-i \frac{\alpha_{\nu}}{k_0} A_2^{(\nu)}) \cdot \beta_l^{(\nu)} = -\frac{K_l}{k_0} \gamma_1^{(l)} \quad (\text{при } z = 0)$$

Предположим, следуя Вайнштейну [192], что коэффициент отражения связан с адмитансом формулой Френеля. Коэффициент отражения есть амплитуда центральной (распространяющейся) из отразившихся гармоник ($\gamma_1^{(0)}$). Зная коэффициент отражения, определим эффективный адмитанс $Y_{эфф} = (1 - r) / (1 + r)$, после чего найдем эффективные параметры. С точностью до τ^2 имеем:

$$1. \varepsilon_{эфф} = \varepsilon_{01} + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_1 \tau_1^2 + O[\tau_1^4], \quad \mu_{эфф} = 1 + O[\tau_1^4];$$

$$2. \varepsilon_{эфф} = \varepsilon_{02} + \frac{2}{\pi^2} \tilde{\varepsilon}_2^2 \tau_2^2 + O[\tau_2^4], \quad \mu_{эфф} = 1 + O[\tau_2^4].$$

В четвертом порядке по τ получаем следующие эффективные материальные параметры:

$$1. Y_{эфф} = \varepsilon_{01}^{1/2} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\tilde{\varepsilon}_1}{\varepsilon_{01}} \tau_1^2 + i \frac{1}{4} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_1}{\varepsilon_{01}} \right)^{1/2} \tau_1^3 - \frac{1}{32} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_1}{\varepsilon_{01}} \right)^2 \tau_1^4 \right),$$

$$n_{эфф} = \varepsilon_{01}^{1/2} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\tilde{\varepsilon}_1}{\varepsilon_{01}} \tau_1^2 - \frac{1}{32} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_1}{\varepsilon_{01}} \right)^2 \tau_1^4 \right),$$

$$\varepsilon_{эфф} = \varepsilon_{01} + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_1 \tau_1^2 + i \frac{1}{4} (\varepsilon_{01} \tilde{\varepsilon}_1)^{1/2} \tau_1^3 + O[\tau_1^5],$$

$$\mu_{эфф} = 1 + i \frac{-1}{4} (\tilde{\varepsilon}_1 / \varepsilon_{01})^{1/2} \tau_1^3 + O[\tau_1^5];$$

$$\begin{aligned}
2. Y_{эфф} &= \varepsilon_{02}^{1/2} \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \frac{\tilde{\varepsilon}_2^2}{\varepsilon_{02}} \tau_2^2 + i \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_2^4}{\varepsilon_{02}} \right)^{1/2} \tau_2^3 - \frac{1}{2\pi^4} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_2^2}{\varepsilon_{02}} \right)^2 \tau_2^4 \right) + O[\tau_2^5], \\
n_{эфф} &= \varepsilon_{02}^{1/2} \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \frac{\tilde{\varepsilon}_2^2}{\varepsilon_{02}} \tau_2^2 - \frac{1}{2\pi^4} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_2^2}{\varepsilon_{02}} \right)^2 \tau_2^4 \right) + O[\tau_2^5], \\
\varepsilon_{эфф} &= \varepsilon_{02} + \frac{2}{\pi^2} \tilde{\varepsilon}_2^2 \tau_2^2 + i \frac{1}{\pi^2} (\varepsilon_{02} \tilde{\varepsilon}_2^2)^{1/2} \tau_2^3 + O[\tau_2^5], \\
\mu_{эфф} &= 1 + i \frac{-1}{\pi^2} (\tilde{\varepsilon}_2^2 / \varepsilon_{02})^{1/2} \tau_2^3 + O[\tau_2^5].
\end{aligned}$$

Заметим, что эффективные параметры среды имеют мнимые части разных знаков. Данное явление хорошо известно для слоистой среды при распространении перпендикулярно слоям [166, 179], однако, в этом случае оно связано с мезоскопичностью вводимого имеданса (см. [179]). В рассматриваемом случае, так же, как и в задаче [166], нет ни поглощения, ни усиления волны (волновой вектор чисто действительный), и появление мнимых частей связано, по всей видимости, с невозможностью ввести локальную эффективную магнитную и диэлектрическую проницаемости.

Отражение и прохождение волны через композиционный слой. Сравнивая коэффициенты отражения и прохождения, полученные при решении задачи (о слое), с коэффициентами для эффективного слоя $\varepsilon_{эфф}$ и $\mu_{эфф}$, получаем, что с точностью до второго порядка малости они совпадают. При решении задачи с большей точностью данный метод не применим, т.к. при чисто действительном коэффициенте преломления эффективный адмитанс оказывается комплексным, что ведет к нарушению закона сохранения энергии (см. рисунок 90).

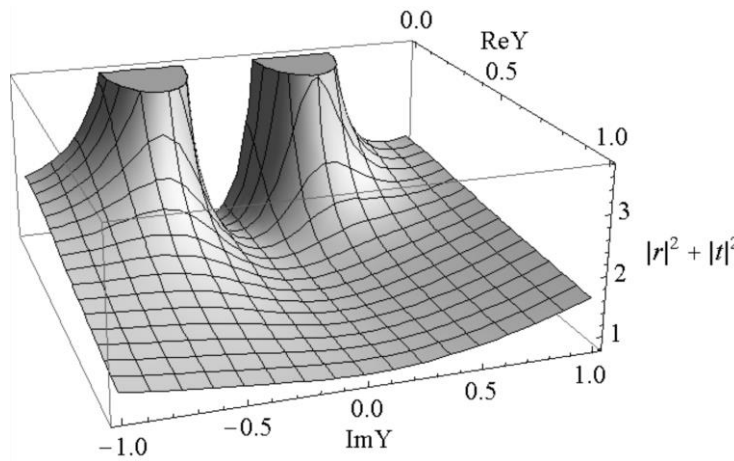


Рисунок 90 – Отклонение закона сохранения энергии при вещественном показателе ($n=2,3$) преломления и произвольном адмитансе.

Учет поверхностных токов при введении эффективных параметров

Итак, как было показано в предыдущих разделах, существующие теории гомогенизации уравнений Максвелла обладают несколькими принципиальными недостатками. Во-первых, эффективные параметры могут зависеть от размера образца и свойств окружающей его среды (см. например [134]). Во-вторых, мнимые части ε и μ могут быть ненулевыми в отсутствие реальной диссипации (см. например [165]). В-третьих, знак мнимых частей ε или μ может противоречить отсутствию активных компонентов в составе метаматериала [193-195]. В-четвертых, вид частотной дисперсии материальных параметров может противоречить принципу причинности [193-195]. Часто для разрешения данных проблем вводятся дополнительные эффективные параметры. Они могут выражать собой новые физические свойства, отсутствующие у составляющих метаматериал компонентов (анизотропию, искусственный магнетизм, киральность и т.д.), или быть параметрами, описывающими схему гомогенизации [196-198]. В последнем случае дополнительные эффективные параметры не имеют ясного физического смысла.

Ниже показано, что ключевым моментом в решении задачи гомогенизации являются граничные условия для усредненных полей. Показано, что модификация граничных условий введением эффективных поверхностных токов позволяет

избежать нефизических эффектов, а именно, зависящих от размеров образца диэлектрической и магнитной проницаемостей, ненулевой мнимой части импеданса.

Обычно при решении задачи гомогенизации предполагается, что в неоднородной среде усредненные (гомогенизированные) поля подчиняются уравнениям Максвелла и что для этих полей на любых границах выполняются обычные максвелловские граничные условия. Большинство теорий являются феноменологическими и различаются способами определения усредненных полей и наборами эффективных параметров [199, 200]. При измерении свойств метаматериала в эксперименте учитываются дальние поля рассеянных образцом волн вместо микроскопической картины полей вблизи образца и внутри него. В простейшем случае плоскопараллельной пластинки описание рассеяния ею волн сводится к определению коэффициента отражения r и коэффициента прохождения t . При решении задачи гомогенизации параметры однородного образца подбираются так, чтобы минимизировать расхождения между полученными для этого однородного образца коэффициентами r и t и этими же коэффициентами для реального образца. Данный метод получения эффективных параметров применяется, например, в [201-205], будем называть его rt -методом. Однако в rt -методе анализируется связь дальних полей, аналитически продолженных к границам неоднородного образца, и не учитываются ближние поля снаружи образца; внутри же рассматриваются усредненные поля вместо реальных, отражающих микроструктуру неоднородного образца [206, 207]. Поэтому нет ничего удивительного в невыполнении максвелловских граничных условий для усредненных полей на границе между образцом и внешней средой. Тангенциальные компоненты усредненных полей могут испытывать скачок на границе образца из метаматериала. Возникает вопрос, как можно учесть этот скачок.

Скачки тангенциальных компонент усредненных полей \vec{E} и \vec{H} на границах композитного материала можно учесть введением переходных слоев [208-213].

Переходный слой может иметь различное происхождение, например, при различных процедурах усреднения по объему, включающему в себя границу образца [209, 211-213], или вследствие различного ответа включений, находящихся внутри и на границе образца [208], или даже он может быть введен для описания некомпенсированности на поверхности образца молекулярных токов, связанных с намагниченностью образца [214, 215]. Не существует единого метода построения таких переходных слоев. Это создает трудности в интерпретации экспериментальных данных. Тем не менее, если правильно угадать структуру переходного слоя [212, 213], то полученные исходя из анализа коэффициентов отражения и прохождения эффективные параметры материалов не противоречат ни принципу причинности, ни отсутствию активных компонентов в реальной системе.

Вместо переходного слоя можно вести поверхностные токи. Дополнительные поверхностные токи были использованы и ранее при описании мезоскопических систем, таких как металлические решетки [216] или шероховатые поверхности [217]. Кроме того, иногда дополнительные поверхностные токи можно ввести вместо некоторых объемных эффективных параметров [198, 215]. Например, при гомогенизации одномерного ФК авторы [198] вводят эффективную магнитоэлектрическую связь, в основе которой лежит несимметричность элементарной ячейки ФК, и показывают, что альтернативой этому может быть переход к ФК с симметричными элементарными ячейками без эффективной магнитоэлектрической связи и введение на границах образца поверхностных токов. Таким образом, введение дополнительных поверхностных токов представляется универсальным способом учета скачков тангенциальных компонент усредненных полей при использовании rt -метода. Характеристики поверхностных токов могут быть получены из измерений коэффициентов r и t при разных толщинах образцов.

Как упоминалось ранее, С.М. Рытов теоретически рассмотрел [41] бесконечный фотонный кристалл с элементарной ячейкой из двух однородных

слоев с толщинами d_1 и d_2 и вывел точное дисперсионное соотношение, из которого можно определить эффективный коэффициент преломления:

$$\cos(k_{Ryt}\Lambda) = \cos(k_0\sqrt{\varepsilon_1}d_1)\cos(k_0\sqrt{\varepsilon_2}d_2) - \frac{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\sin(k_0\sqrt{\varepsilon_1}d_1)\sin(k_0\sqrt{\varepsilon_2}d_2),$$

где $\Lambda = d_1 + d_2$ – толщина периода.

Также Рытов определил эффективный импеданс как отношение усредненного по периоду ФК поля \vec{E} к усредненному полю \vec{H} : $\zeta_{eff}^{Ryt} = \langle E(z) \rangle / \langle H(z) \rangle$. По известным эффективному коэффициенту преломления $n_{eff}^{Ryt} = k_{Ryt} / k_0$ и эффективному импедансу ζ_{eff}^{Ryt} легко найти эффективные диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_{eff}^{Ryt} = n_{eff}^{Ryt} / \zeta_{eff}^{Ryt}$ и магнитную проницаемость $\mu_{eff}^{Ryt} = n_{eff}^{Ryt} \zeta_{eff}^{Ryt}$. Однако это дает довольно странные результаты. Несмотря на то, что коэффициент преломления является действительным (рассматриваются частоты, значительно меньшие частот первой запрещенной зоны), эффективные диэлектрическая и магнитная проницаемости имеют мнимые части. Более того, знаки и величины мнимых частей зависят от выбора вида элементарной ячейки ФК, который является неоднозначным.

Рассмотрение отрезков ФК не устраняет всех проблем [37]. Далее для определенности будем рассматривать немагнитный ФК с периодом из двух слоев одинаковой толщины d с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1 = 2$ и $\varepsilon_2 = 3$. *rt*-метод дает значения эффективного импеданса, зависящие от толщины образца. Это связано отчасти с тем, что входной импеданс элементарной ячейки зависит от выбора ее представления.

Заранее ясно, что асимметричный образец, содержащий целое число N элементарных ячеек, не может быть адекватно заменен некоторым однородным слоем (всегда симметричным), описываемым эффективными диэлектрической и магнитной проницаемостями (или n_{eff} и ζ_{eff}). Попытки такой замены приводят к колебаниям значения эффективного адмитанса в зависимости от толщины

образца L , хотя эффективный коэффициент преломления и стремится к рытовскому значению при больших L (см. рисунок 91a). Более того, ζ_{eff} обладает мнимой частью, не стремящейся к нулю при $L \rightarrow \infty$.

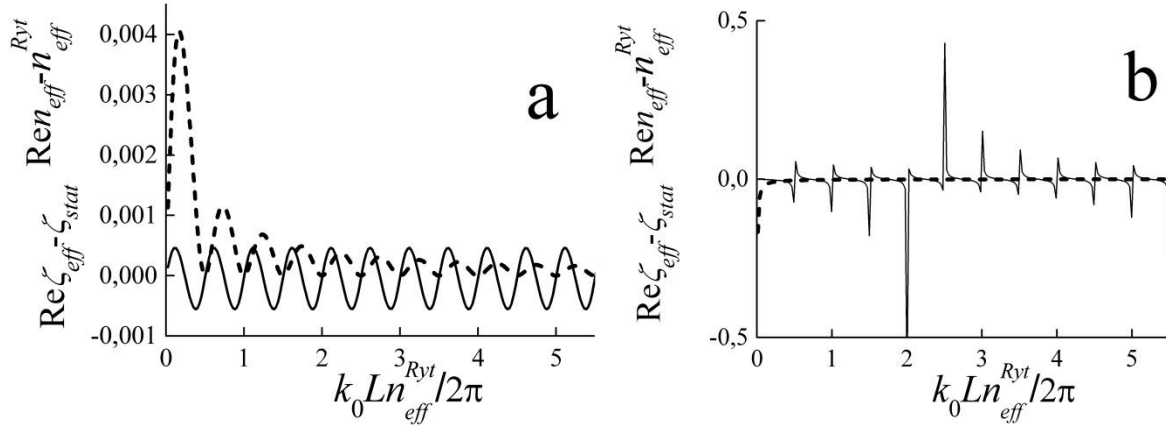


Рисунок 91 – $\text{Re} \zeta_{eff} - \zeta_{stat}$ (сплошные кривые) и $\text{Re} n_{eff} - n_{eff}^{Ryt}$ (пунктирные кривые) в случае асимметричного образца (a) и в случае симметричного образца (b) как функции толщины образца L . Обезразмеренная частота $k_0 d = 0,05$. На (a) и (b) $\text{Re} n_{eff}$ стремится к рытовскому значению, определяемому (48): $n_{eff}^{Ryt} \approx 1,58114$.

В случае симметричного образца, состоящего из $N + 1/2$ элементарных ячеек и имеющего одинаковые слои на границах, обычный rt -метод дает значения диэлектрической и магнитной проницаемостей, зависимость которых от L имеет полюса (см. рисунок 91b). Положения полюсов соответствуют толщинам образца, равным целому числу полуволн, определяемых через рытовский коэффициент преломления: $L = (N + 1/2)d = \pi l / k_{Ryt}$, $l = 1, 2, \dots$

Т-матрица однородного слоя с коэффициентом преломления n , импедансом $\zeta = 1/n$ и толщиной L имеет вид:

$$T^{ul} = \begin{pmatrix} \cos nk_0 L + \frac{i}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \sin nk_0 L & \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta \right) \sin nk_0 L \\ \frac{i}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \sin nk_0 L & \cos nk_0 L - \frac{i}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \sin nk_0 L \end{pmatrix}$$

Т-матрица T^{odd} симметричной системы равна произведению $T^{odd} = T_1 T_{cell}^N$, где T_{cell} – Т-матрица элементарной ячейки и T_1 – Т-матрица граничного слоя с

диэлектрической проницаемостью ε_1 . $T_{cell} = T_2 T_1$. Приравнявая T^{ul} и T^{odd} , найдем выражения для эффективных параметров:

$$\cos(nk_0L) = \cos(n_{eff}^{Ryt}k_0L) - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin(n_{eff}^{Ryt}k_0L)}{4\sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2}}k_0d + O((k_0d)^2)$$

$$1/\zeta^2 = 0.5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 0.5(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)k_0d\sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2}\operatorname{ctg}(n_{eff}^{Ryt}k_0L) + O((k_0d)^2)$$

Видно, что эффективный импеданс ζ имеет сингулярности при $n_{eff}^{Ryt}k_0L = \pi m$.

Эти два примера (симметричный и несимметричный образец) показывают, что для получаемых *rt*-методом значений импеданса слоистой структуры характерно мезоскопическое поведение (такой проблемы не возникает с вычислением коэффициента преломления, который во всех случаях стремится к рывовскому при $L \rightarrow \infty$). Введение поверхностных токов модифицирует максвелловские граничные условия, позволяя учесть скачки усредненных полей на границах образца:

$$E_y^{(sample)} - E_y^{(vacuum)} = s_M^{(left)} H_z^{(sample)}; \quad H_z^{(vacuum)} - H_z^{(sample)} = s_E^{(left)} E_y^{(sample)} \quad (91a)$$

$$E_y^{(vacuum)} - E_y^{(sample)} = s_M^{(right)} H_z^{(sample)}; \quad H_z^{(sample)} - H_z^{(vacuum)} = s_E^{(right)} E_y^{(sample)} \quad (91b)$$

$s_E^{(left)}$, $s_M^{(left)}$, $s_E^{(right)}$, $s_M^{(right)}$ — константы, характеризующие «поверхностные проводимости».

С учетом граничных условий (91), Т-матрица однородного слоя с поверхностными токами T^{ulc} будет иметь вид:

$$T_{11}^{ulc} = T_{22}^{ulc*} = \frac{(1-s_E^l)(1+s_M^r) + (1-s_E^r)(1+s_M^l)}{2(1+s_E^l s_M^l)} \cos nk_0L + i \frac{(1-s_E^l)(1-s_E^r)\zeta^2 + (1+s_M^l)(1+s_M^r)}{2\zeta(1+s_E^l s_M^l)} \sin nk_0L$$

$$T_{12}^{ulc} = T_{21}^{ulc*} = -\frac{s_E^l + s_E^r + s_M^l(1-s_E^r) + s_M^r(1+s_E^l)}{2(1+s_E^l s_M^l)} \cos nk_0L + i \frac{(1-s_M^l)(1+s_M^r) - \zeta^2(1+s_E^l)(1-s_E^r)}{2\zeta(1+s_E^l s_M^l)} \sin nk_0L$$

Эффективные параметры (коэффициент преломления, импеданс и четыре константы, характеризующие поверхностные токи) вычислены как значения, минимизирующие невязку

$$\delta = \sum_i \{ |r(L_i) - r^{exact}(L_i)|^2 + |t(L_i) - t^{exact}(L_i)|^2 \}, \quad (92)$$

где коэффициенты $r^{exact}(L_i)$ и $t^{exact}(L_i)$ вычислены точно с помощью Т-матриц для неоднородного образца, коэффициенты $r(L_i)$ и $t(L_i)$ – исходя из T^{ulc} , суммирование ведется по количеству элементарных ячеек в образце.

Ниже рассматриваются два варианта симметричного и два варианта асимметричного образца. В двух симметричных образцах первый и последний слои одинаковы, либо с $\varepsilon_1 = 2$, либо с $\varepsilon_2 = 3$. В зависимости от этого обозначим такие образцы как, соответственно, (1,1)- и (2,2)-образец. Асимметричные образцы содержат целое количество элементарных ячеек, волна падает на передний слой либо с ε_1 , либо с ε_2 . Обозначим такие образцы как (1,2)- и (2,1)-образец, соответственно. Минимизируя невязку (92), находим шесть эффективных параметров n_{eff} , ζ_{eff} , $s_E^{(right)}$, $s_E^{(left)}$, $s_M^{(right)}$, и $s_M^{(left)}$, не зависящих от толщины образца L . Суммирование в (92) проводится по толщинам образцов от содержащих $i = 20000$ периодов, до содержащих $i = 40000$ периодов ($N_{real} = 2 \cdot 10^4$). Отклонения между r и t для реального и однородного образцов равны $\delta_{r,t} = \sqrt{\delta / (2N_{real})}$. Результаты вычислений эффективных параметров для вышеописанных образцов при $k_0 d = 0,05$ приведены в таблице 1.

Таблица 1: Материальные параметры приведены с точностью 10^{-7} .

Образец	ζ_{eff}	$s_E^{(left)}$	$s_E^{(right)}$	$s_M^{(left)}$	$s_M^{(right)}$	$\delta_{r,t}$
(1,1)	0,63245	0,01251i	0,01251i	0	0	$4 \cdot 10^{-9}$
(2,2)	0,63245	-0,01251i	-0,01251i	0	0	$4,5 \cdot 10^{-9}$
(1,2)	0,63242	0,00143i	-0,00143i	0,004438i	-0,004438i	$4,9 \cdot 10^{-8}$
(2,1)	0,63242	-0,00143i	0,00143i	-0,004438i	0,004438i	$2 \cdot 10^{-8}$
(1,1)(2,2)	0,63249	$6,1 \cdot 10^{-5}$	$6,1 \cdot 10^{-5}$	$3,3 \cdot 10^{-5}$	$3,3 \cdot 10^{-5}$	10^{-2}
(1,2)(2,1)	0,63242	$-6 \cdot 10^{-7}$	$-6 \cdot 10^{-7}$	$-1 \cdot 10^{-6}$	$-1 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-3}$

Так как для столь толстых систем коэффициент преломления близок к рывовскому, всюду принимаем $n_{eff} = n_{eff}^{Ryt}$. Значения эффективного импеданса ζ_{eff} практически совпадают со статическими. Поверхностные проводимости сильно зависят от типа образца, но не зависят от его толщины. Они пропорциональны разности $\varepsilon_b - \langle \varepsilon \rangle$, где ε_b – диэлектрическая проницаемость слоя, расположенного на границе. Таким образом $s_E^{(left)} = s_E^{(right)}$, $s_M^{(left)} = s_M^{(right)}$ в случае симметричного образца. При $k_0 d \ll 1$ приравнивание T^{ulc} и T^{odd} в случае образца (1,1) дает

$$\frac{1}{\zeta_{eff}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}} + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 (k_0 d)^2}{96 \sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2}}, \quad s_E = i \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{4} k_0 d, \quad s_M = 0 \text{ с точностью до } O((k_0 d)^3).$$

Для асимметричного образца $s_E^{(left)} = -s_E^{(right)}$, $s_M^{(left)} = -s_M^{(right)}$. Подбор эффективных параметров, универсальных для образцов (1,1) и (2,2) (при этом суммирование в (92) производится как по образцам типа (1,1) разной толщины, так и по образцам типа (2,2)), а также для образцов (1,2) и (2,1) дает симметричные поверхностные проводимости. При этом невязка значительно возрастает: $\delta_{r,t} \approx 10^{-2} \propto k_0 d$. Использование универсальных (не зависящих от типов слоев на границах образца) значений поверхностных проводимостей слабо влияет на значения эффективного импеданса и коэффициента преломления. Таким образом, данная процедура позволяет получать значения эффективных параметров не только не зависящих от толщины образца, но и не зависящих от его типа, и имеет точность $k_0 d$.

Итак, введение дополнительных поверхностных токов устраняет мезоскопическое поведение эффективного импеданса (как и его мнимую часть в случае асимметричных образцов) ценой добавления дополнительных эффективных параметров – электрических и магнитных поверхностных проводимостей, имеющих ясный физический смысл. Новые параметры зависят от характеристик слоев на поверхности образца и не зависят от толщины образца.

Аналитические свойства эффективного показателя преломления

Как было показано ранее, попытка описать конечные образцы по формулам Рытова приводит к противоречию [37]. Однако расчеты также показали, что по мере увеличения толщины эффективный показатель преломления, восстановленный по данным рассеяния, стремится к константе, предсказанной Рытовым [164]. То есть, не смотря на невозможность введения вне статического приближения диэлектрической и магнитной проницаемостей, оказывается, что показатель преломления ввести можно. Таким образом, проблема введения эффективных параметров вне статического приближения связана с описанием граничных условий. Осознание этого факта привело к попытке регуляризовать введение эффективного характеристического импеданса за счет введения поверхностных токов [218].

В данном разделе отвлечемся от проблемы введения граничных условий и будем изучать лишь свойства эффективного показателя преломления. Отметим, что знание эффективного показателя преломления ценно сам по себе, так как описывает свойства собственных мод. В частности, для установления законов преломления (типа закона Снелиуса) нужен лишь показатель преломления.

Эффективный волновой вектор. Рассмотрим бесконечную периодическую одномерную систему, в которой поперек слоев распространяется плоская электромагнитная волна. Для простоты будем рассматривать случай, когда слоистая среда состоит из двух типов слоев с различными диэлектрическими характеристиками. Для такой системы задача нахождения полей была решена Рытовым.

Полученный Рытовым закон дисперсии определяет эффективный волновой вектор в бесконечной слоистой среде. Однако неизвестно, можно ли использовать эту величину в качестве эффективного параметра для конечной среды. Действительно, соотношение Рытова было получено в предположении о существовании периодического решения в бесконечной среде, в то время как в ограниченной среде такое предположение неприменимо. Поэтому предварительно

требуется проверить справедливость предельного перехода от конечной к бесконечной среде.

Рассмотрим ограниченную периодическую среду. Для нее можно ввести эффективный волновой вектор, основываясь на коэффициенте прохождения. Для этого представим коэффициент прохождения в виде

$$t = \exp(i\varphi) = \exp\left(i \operatorname{Im}(Ln(t)) + \ln|t|\right).$$

Как видно из данной формулы, мнимую часть логарифма коэффициента прохождения можно трактовать как набег фазы на длине образца L . Соответственно, $\ln|t|/L$ описывает изменение амплитуды электрического поля. С другой стороны, этот эффект характеризуется мнимой частью волнового вектора, участвующей в выражении электромагнитных полей таким же образом, как и $\ln|t|/L$. Это дает основание рассматривать эту величину в качестве мнимой части эффективного волнового вектора. Таким образом, эффективный волновой вектор для ограниченной среды можно определить следующими соотношениями:

$$\operatorname{Re} k_{eff} = \frac{\operatorname{Im}(\ln(t))}{L},$$

$$\operatorname{Im} k_{eff} = -\frac{\operatorname{Re}(\ln(t))}{L}.$$

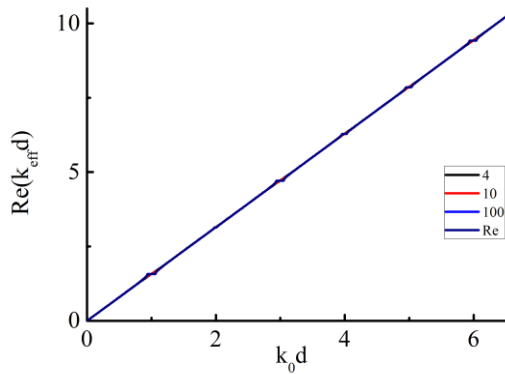
Или объединяя в одну формулу,

$$k_{eff} = -i \frac{\ln(t)}{L}.$$

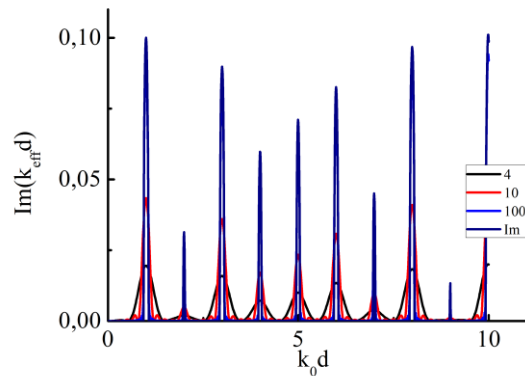
Существование такой простой интерпретации в одномерном случае дает возможность сравнить точное решение и решение Рытова и определить, насколько применимо последнее для описания ограниченной периодической среды.

Результаты численного эксперимента (см. рисунок 92) показали наличие сходимости к рытовскому волновому вектору. На первом графике изображено поведение действительной части k_{eff} для структуры из 4, 10 и 100 слоев, а также значение Рытова. Как можно видеть, наибольшие отличия этих кривых

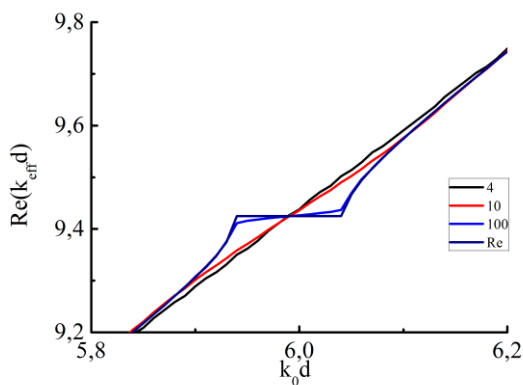
проявляются в области запрещенных зон. Хорошо заметно, что для случая малого числа слоев дисперсионные характеристики заметно отличаются от значений, предложенных Рытовым. Однако, с ростом толщины образцов дисперсионная кривая конечного образца сходится к кривой Рытова.



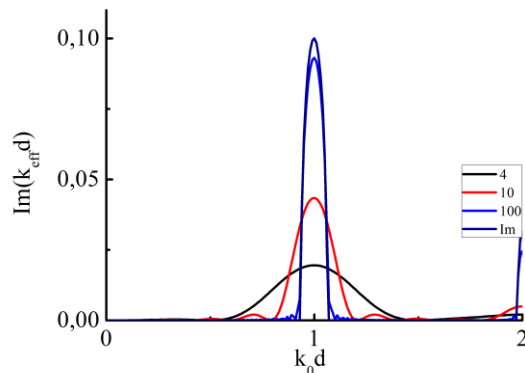
1



2



3



4

Рисунок 92 – Дисперсионные кривые действительной (1 и 3) и мнимой (2 и 4) частей эффективного волнового вектора для структур с чередующимися слоями и состоящих из 4 (черный цвет), 10 (красный цвет), 100 (синий цвет) слоев. Темно-синим цветом изображены дисперсионные кривые для эффективного волнового вектора, соответствующего уравнению Рытова. Диэлектрические проницаемости слоев $\varepsilon_1 = 2$ и $\varepsilon_2 = 3$.

Мнимая часть k_{eff} изображена на третьем графике. Приведены дисперсионные кривые для того же набора слоев. Черная кривая,

соответствующая 4 слоям, в целом отражает поведение эффективного волнового вектора, однако видно, что мнимая часть присутствует на всех частотах, за исключением резонансных. С ростом числа слоев наблюдается сужение полос поглощения. При этом кривые сближаются с рытовской зависимостью. Таким образом, с увеличением толщины образца, наблюдается сходимость к значениям из уравнения Рытова.

Аналитичность эффективного показателя преломления. Сходимость производной k_{eff} не является равномерной (см. рисунок 93). Серая и черная кривые показывают отличие зависимостей для образца конечной толщины от аналогичных зависимостей для рытовского волнового вектора. Как видно, на границах запрещенной зоны происходит нарушение равномерной сходимости.

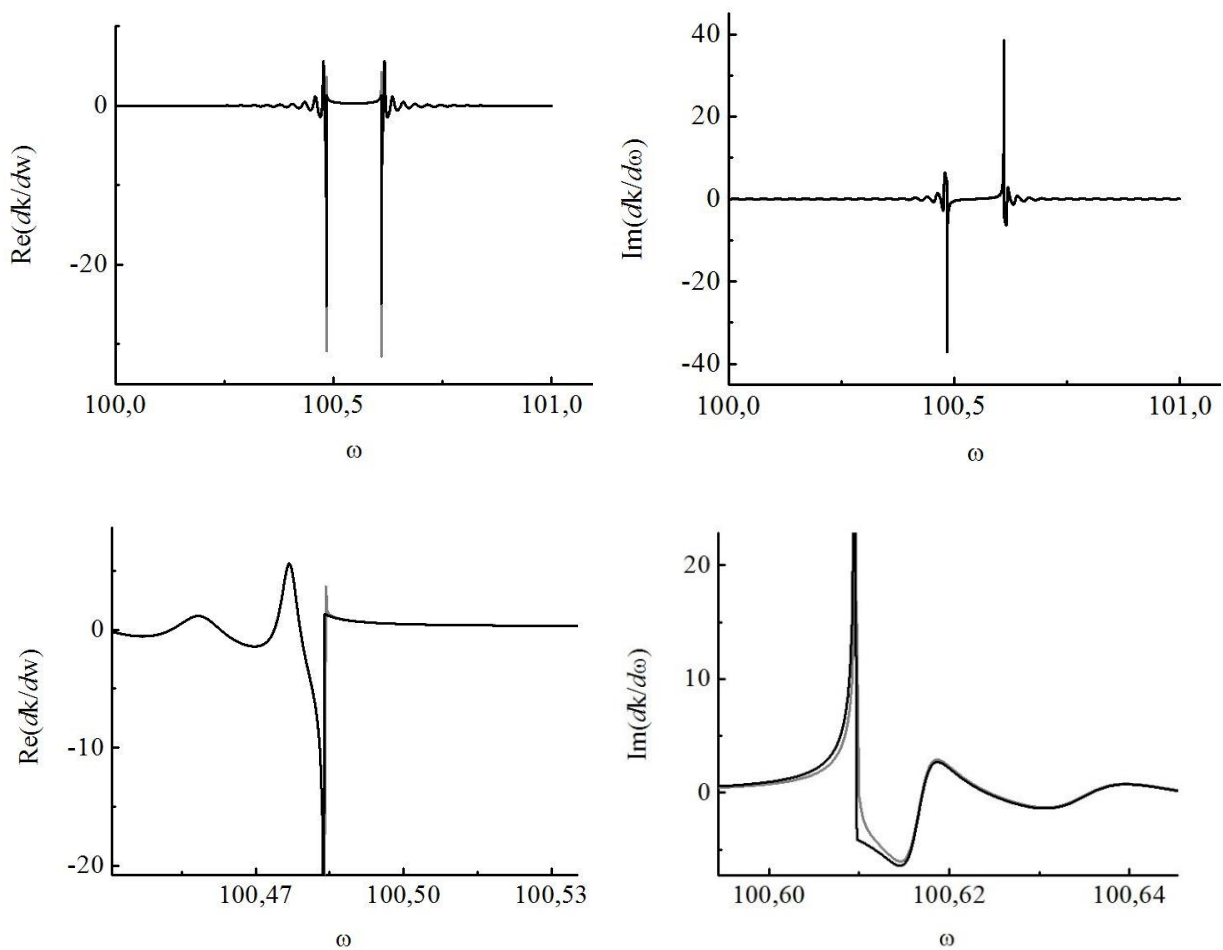


Рисунок 93 – Действительные и мнимые части производной эффективного волнового вектора для случаев конечной структуры (серый цвет) и системы Рытова (черный цвет).

Соотношения Крамерса-Кронинга для k_{eff} , описываемого уравнением Рытова, должны иметь следующий вид:

$$\frac{\partial k'}{\partial \omega}(\omega_0) = const + \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial k''}{\partial \omega}}{\omega - \omega_0} d\omega$$

$$\frac{\partial k''}{\partial \omega}(\omega_0) = const - \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial k'}{\partial \omega}}{\omega - \omega_0} d\omega$$

Предположение о том, что k_{eff} удовлетворяет этим соотношениям можно сделать на основе рассуждений об аналитичности коэффициента прохождения. Действительно, элементы Т-матрицы являются величинами, не имеющими особенностей в верхней полуплоскости, как функции ε и μ . Причем, в связи с тем, что след Т-матрицы всегда равен 1, то в верхней полуплоскости коэффициент прохождения является не только аналитической функцией, но и функцией, не обращающейся в 0. Если вводить k_{eff} через коэффициент прохождения, то его производная

$$\frac{\partial k_{eff}}{\partial \omega} = -i \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \omega} \ln(t) = -i \frac{1}{L} \frac{1}{t} \frac{\partial t}{\partial \omega}$$

является аналитической функцией в верхней полуплоскости, а следовательно, производная k_{eff} слоистой среды должна удовлетворять соотношениям Крамерса-Кронинга. Однако, как было показано ранее, k_{eff} конечной среды сходится к значению Рытова. Таким образом, естественно предположить, что производная Рытовского волнового вектора должна также удовлетворять соотношениям Крамерса-Кронинга.

В данном разделе соотношения Крамерса-Кронинга проверялись как для вектора Рытова, так и для $\frac{\partial \ln(t)}{\partial \omega}$. Естественно ожидать, что соотношения Крамерса-Кронинга будут одновременно выполняться или не выполняться для обеих величин. Для данной проверки проведен численный эксперимент, в котором проверка соотношений проводилась непосредственно. То есть интегралы, участвующие в формуле, вычислялись численно на основе

предварительно рассчитанных величин. Далее заново посчитанная величина $\frac{\partial k_{eff}}{\partial \omega}$ сравнивалась с исходными значениями.

Как уже говорилось, коэффициент прохождения можно получить с помощью Т-матриц. Используя разностную аппроксимацию для производной

$$\frac{\partial t}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \approx \frac{t\left(\omega + \frac{h}{2}\right) - t\left(\omega - \frac{h}{2}\right)}{h},$$

где h – шаг по частоте, используемый при вычислениях, можно вычислять величину $\frac{\partial \ln(t)}{\partial \omega} = \frac{1}{t} \frac{\partial t}{\partial \omega}$ в точке ω_0 . Эта величина использована при проверке соотношения Крамерса-Кронинга для эффективного волнового вектора конечной периодической среды.

При проверке соотношения Крамерса-Кронинга для производной вектора Рытова использовано значение $\frac{\partial k_{eff}}{\partial \omega}$, полученное при непосредственном дифференцировании дисперсионного соотношения. При этом использованы особенности кривых. Можно заметить, что в силу действительности величин, входящих в дисперсионное соотношение, в запрещенной зоне и только в ней $|\cos(k_{Br}h)| > 1$. При этом действительная часть k_{eff} удовлетворяет условию $k_{eff}d = \pi n; n \in \mathbb{Z}$ и постоянна в каждой запрещенной зоне, т.е. искомое значение $\text{Re} \frac{\partial k_{eff}}{\partial \omega}$ равно 0 внутри запрещенной зоны. В запрещенной же зоне мнимая часть k_{eff} имеет один максимум. Ее производная на границах запрещенной зоны стремится к бесконечности, таким образом, величина $\text{Im} \frac{\partial k_{eff}}{\partial \omega}$ в начале запрещенной зоны спускается из $+\infty$, меняет знак и уходит на $-\infty$ в ее конце. Эти замечания позволяют однозначно определить компоненты $\frac{\partial k_{eff}}{\partial \omega}$ на основе дисперсионного соотношения. В процессе расчетов интеграл вычислялся методом

трапеций, что позволяет добиться ошибки, имеющей второй порядок малости по величине шага интегрирования.

Стоит обратить внимание, что подынтегральная функция имеет особенность в точке ω_0 , поэтому при вычислении интеграла в собственном значении стоит отдельное внимание уделить участку интегрирования в окрестности этого полюса. Поэтому в окрестности этой точки была использована линейная аппроксимация. Пусть в точках $x = \omega_0 \pm h$, где h – шаг интегрирования, значение числителя подынтегральной функции равны f_1, f_0 . Тогда считая, что в числителе стоит линейная функция $f(\omega) = \frac{f_1 - f_0}{2h}(\omega - 2h) + \frac{1}{2}(f_1 + f_0)$ и выполнив интегрирование около этой точки, получим, что часть интеграла в окрестности точки ω_0 можно оценить как $f_1 - f_0$.

Под интегралом в соотношениях Крамерса-Кронинга понимается его собственное значение. Таким образом, чтобы численно выполнить интегрирование, необходимо правильно выбрать интервал интегрирования. Поэтому были проведены вычисления на широком диапазоне интервалов, что позволило оценить интервал, расширяя который нельзя получить заметное изменение интеграла по сравнению с точностью вычислений. Оказалось, что интеграл довольно быстро сходится, и зависимость ошибки вычислений от диапазона интегрирования существенна только при величине интервала ~ 1 в безразмерных единицах $(\omega \cdot 1\text{м/с})$. Такая достаточно быстрая сходимость позволяет избежать численных ошибок интегрирования благодаря возможности ограничить интервал.

К сожалению, используемые при вычислении тригонометрические функции вносят большую (в сравнении с прочими алгебраическими действиями) ошибку машинного счета: эта ошибка превосходит прочие вычислительные ошибки на несколько порядков. Это становится существенным минусом при проверке соотношений Крамерса-Кронинга на малых шагах, когда ошибка машинного счета растет с числом математических вычислений, а ошибка оценки интеграла

уменьшается. Поэтому для того, чтобы удостовериться, что полученные результаты не являются следствием ошибок машинного счета, была проведена серия вычислений с использованием библиотек, использующих повышенную точность вычислений.

Первым важным результатом, полученным в ходе вычислений, было нахождение постоянных, участвующих в соотношения Крамерса-Кронинга. Было обнаружено, что участвующая в формуле для $\frac{\partial k'}{\partial \omega}$ постоянная равна 0, а постоянная для $\frac{\partial k''}{\partial \omega}$ может быть оценена как $\langle \sqrt{\varepsilon} \rangle$. Для проверки данного утверждения были проведены расчеты для сред со значительно отличающимися ε . Это позволило упростить определение вида зависимости постоянной от ε . Таким образом, было действительно проверено, что постоянная с точностью до $\sim 10^{-4}$ равна $\langle \sqrt{\varepsilon} \rangle$ (см. рисунок 94).

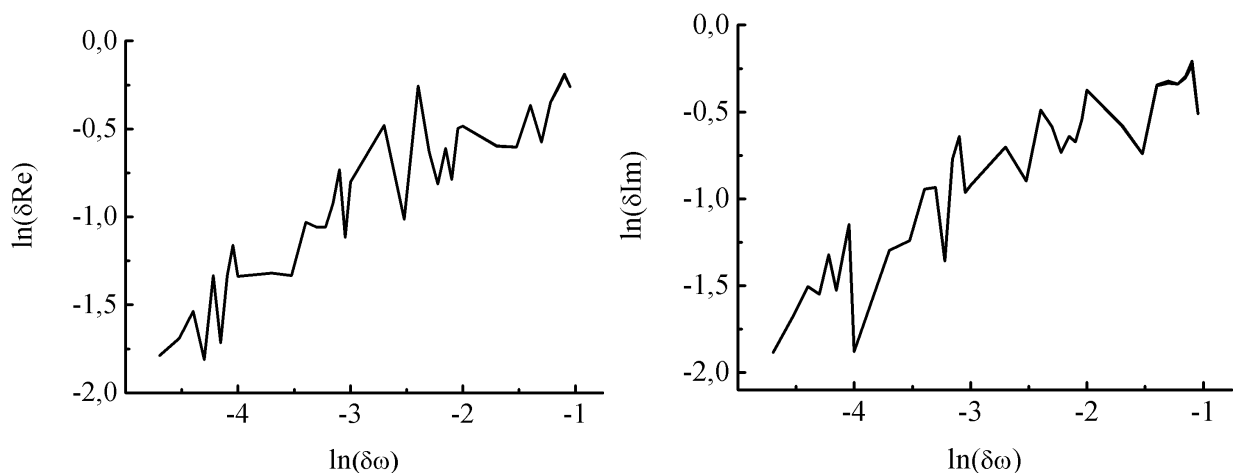


Рисунок 94 – Отличие между производной волнового вектора Рытова и ее значением, вычисленным по формуле типа Крамерса-Кронинга, в логарифмическом масштабе, в зависимости от шага разбиения, используемого в численном расчете.

Таким образом, получено, что действительная и мнимая части показателя преломления удовлетворяют соотношениям типа Крамерса-Кронинга

$$\frac{\partial k'}{\partial \omega}(\omega_0) = \langle \sqrt{\varepsilon} \rangle + \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial k''}{\partial \omega}}{\omega - \omega_0} d\omega$$

$$\frac{\partial k''}{\partial \omega}(\omega_0) = -\frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial k'}{\partial \omega}}{\omega - \omega_0} d\omega$$

Самоусредняемость показателя преломления

Будем исследовать сигнал, прошедший 1D неупорядоченную систему, состоящую из немагнитных диэлектрических слоев различной проницаемости. Для простоты будем считать все слои одинаковой толщины.

Часто в исследовании связи между локализацией и распространением света рассматривают случайную систему, погруженную в вакуум. В этом случае на коэффициенты прохождения, отражения и другие данные рассеяния влияет как эффект Андерсоновской локализации, так и граница между вакуумом (имеющим импеданс, равный 1) и неупорядоченной средой (как правило, имеющей среднюю проницаемость и тем самым импеданс больше единицы). Для того чтобы отделить эффект локализации от рассеяния на этой границе, поместим рассматриваемую систему в среду со средней диэлектрической проницаемостью.

Коэффициент прохождения одномерной случайной среды можно представить в виде

$$t = T e^{i\varphi} = e^{\gamma L + i\varphi}.$$

Стохастизация фазы в случайно-слоистой среде. Рассмотрим фазу прошедшего сигнала $\varphi = \ln(t/|t|)/i = \text{Im}(\ln(t))$, эта величина определена с точностью до прибавления 2π , поэтому может быть приведена в интервал $[0, 2\pi]$, такую фазу будем называть приведённой. Известно, что при увеличении толщины образца фаза прошедшего сигнала становится случайной величиной [96], равномерно распределённой в интервале $[0, 2\pi]$. Приведенная фаза обладает рядом существенных недостатков, в частности, она не является непрерывной функцией

частоты и, являясь чисто математической величиной, для дальнейших рассуждений непригодна.

В дальнейшем будем пользоваться фазой, восстановленной «по частоте». Это значит, что будем (для фиксированной толщины системы) выбирать фазу таким образом, чтобы она монотонно возрастала по мере увеличения частоты, причём при нулевой частоте фазу прошедшего сигнала будем считать нулевой. Такой выбор фазы также соответствует восстановлению фазы «по прохождению» неоднородного образца, из расчета, что волна в направлении распространения всегда увеличивает фазу. Идентичность методов следует из соображений непрерывности и монотонного возрастания фазы, как по координате, так и по частоте. Отличие между фазой и приведенной фазой аналогично отличию между расширенной картиной изочастот и приведенной картиной изочастот в первую зону Бриллюэна.

Стохастизация приведенной фазы означает, что дисперсия распределения фазы D_φ возрастает по мере увеличения толщины системы (только при возрастающей дисперсии распределение фазы становится более пологим и после приведении в $[0, 2\pi]$ начинает стремиться к константе) (см. рисунок 95).

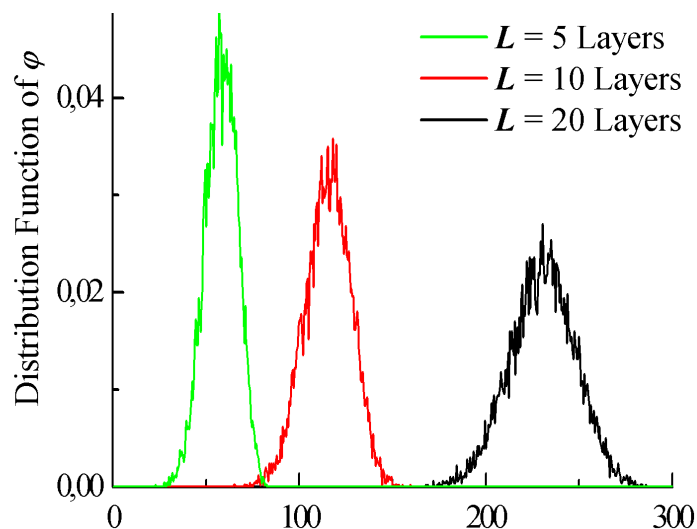


Рисунок 95 – Функции распределения фазы для систем различной толщины.

Итак, видно (см. рисунок 95)²¹, что распределение $\varphi = \text{Im}(\ln(t))$ сдвигается вправо (со средним, пропорциональным толщине) и уширяется по мере увеличения толщины. Естественно рассмотреть, как ведет себя действительная часть логарифма коэффициента прохождения – произведение индекса Ляпунова на толщину системы $\gamma L = \text{Re}(\ln(t))$ (см. рисунок 96).

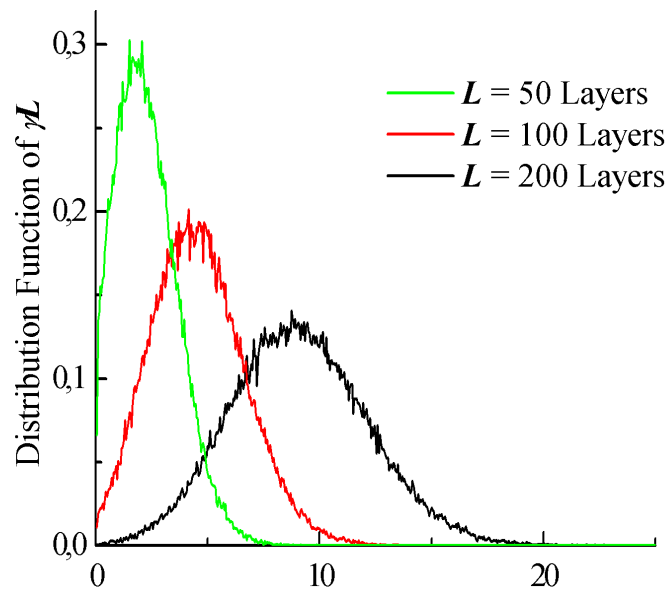


Рисунок 96 – Функции распределения логарифма затухания для систем различной толщины.

Видна полностью аналогичная картину: распределение уширяется (дисперсия $D_{\gamma L}$ растёт) и сдвигается вправо пропорционально L . Это уширение распределения γL имеет довольно плачевные последствия: несмотря на то, что можно знать средний по ансамблю индекс Ляпунова $\langle \gamma \rangle$ для случайной системы и её толщину L , нельзя указать даже порядок коэффициента прохождения, так как отличие $|\gamma L - \langle \gamma \rangle L|$ лишь растёт при увеличении толщины.

Усреднение мнимой части эффективного волнового вектора. Однако, известно, что при увеличении толщины системы индекс Ляпунова самоусредняется и его распределение является асимптотически Гауссовым. Действительно, если

²¹ Система помещена не в вакуум а в среду с средней диэлектрической проницаемостью, так как рассеяние на границе «вакуум–среда» вносит дополнительный сдвиг в фазу прошедшей волны и как показал численный эксперимент, существенно изменяет форму графиков.

рассмотреть распределение индекса Ляпунова, то есть $\gamma = \frac{\gamma L}{L} = \frac{\text{Re}(\ln(t))}{L}$, то окажется что дисперсия индекса Ляпунова D_γ стремится к нулю и γ самоусредняется (рис 97).

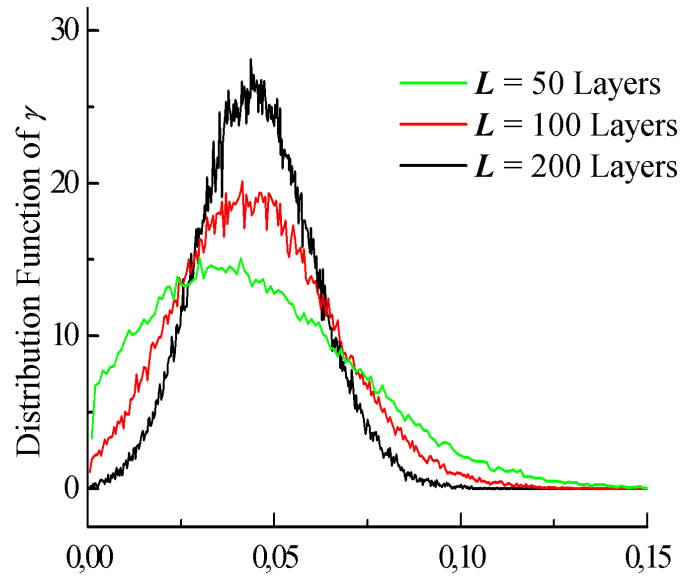


Рисунок 97 – Функции распределения индекса Ляпунова для систем различной толщины.

Это случилось благодаря тому, что дисперсия D_γ стремится к нулю (по мере увеличения толщины) достаточно медленно. А именно, поскольку $D_{\gamma L} = D_\gamma L^2$, то достаточно, чтобы D_γ стремилось к нулю медленнее, чем растет L^2 . Это выполнено, например, если в соответствии со скейлингом положить $D_\gamma = \frac{\gamma}{2L}$.

Усреднение действительной части эффективного волнового вектора. Поскольку, для φ и γL наблюдается схожее поведение, естественным было бы ожидать что для φ/L и γ , поведение было бы так же схоже, и как показывает численный эксперимент это действительно так (см. рисунок 98). То есть, несмотря на то, что фаза стохастизируется, нормированная фаза φ/L самоусредняется.

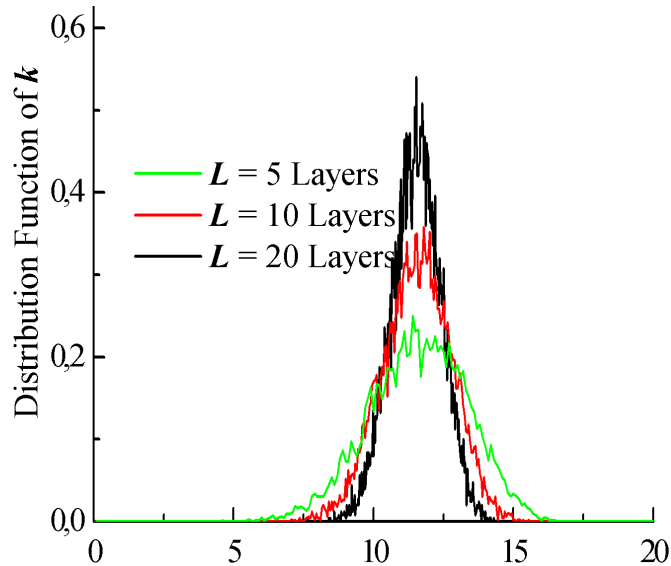


Рисунок 98 – Функции распределения действительной части эффективного волнового вектора для систем различной толщины.

Поскольку система помещена в среду со средней диэлектрической проницаемостью, существенно уменьшен набег фазы, возникающий за счёт прохождения границ, поэтому величина φ/L по смыслу является действительной частью волнового числа, в то время как γ по смыслу может считаться мнимой частью волнового числа.

Ранее было показано, что для сред без поглощения волновой вектор самоусредняется и возможно ввести k_{eff} . При этом были рассмотрены системы в длинноволновом приближении (когда длина волны много больше характерных масштабов неоднородности), и толщины их предполагались малыми в сравнении с длиной локализации. В таких системах оказывалось, что волновой вектор (в отсутствие поглощения), самоусредняясь, стремиться к некоторой чисто действительной величине.

Таким образом, вне длинноволнового приближения волновой вектор k_{eff} также самоусредняется, но в отличие от ранее рассмотренных случаев, у волнового вектора появляется мнимая часть, обусловленная затуханием волны за счёт локализации.

$$k_{eff} = k + i\gamma,$$

где $k = \varphi / L$, а γ – индекс Ляпунова.

Самоусреднение волнового вектора. Пусть имеется два больших куска 1D неупорядоченной системы: кусок А и кусок В. Если их объединить в один большой кусок АВ, то коэффициент прохождения по порядку величины будет равен произведению коэффициентов частей $t_{AB} \approx t_A t_B$. Если добавить еще один кусок С, то $t_{ABC} \approx t_A t_B t_C$, то есть можно считать, что с логарифмической точностью

$$\ln(t_{ABC}) = \ln(t_A) + \ln(t_B) + \ln(t_C).$$

Причем это соотношение справедливо не только для действительных частей [1], но так же и для фаз. Но это справедливо лишь при условии, что выбираются фазы, восстановленные «по прохождению», то есть из расчета, что волна в направлении распространения всегда увеличивает фазу. И, как уже отмечалось, такое восстановление соответствует принятому восстановлению «по частоте».

Поскольку $\ln(t_i)$ независимы и одинаково распределены, то в соответствии с

законом больших чисел $\frac{\sum_{i=1}^N \ln(t_i)}{N}$ асимптотически гауссово распределено, и при

этом среднее квадратичное отклонение $\sigma \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$. То есть в рассматриваемом

случае, поскольку слои имеют одинаковую толщину, $D = \sigma^2 \sim \frac{1}{L}$. Именно поэтому

наблюдается самоусреднение φ / L и γ , причем $D_\gamma \sim D_k \sim \frac{1}{L}$, но происходит

стохастизация фазы и $D_\varphi = L^2 D_k \sim L$ (аналогично для $D_{\gamma L}$). Эти качественные соотношения подтверждаются численным экспериментом.

Отметим что $\langle k_i \rangle - \langle k_B \rangle \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$, где $\langle k_B \rangle = \langle \text{Im}(k_B) \rangle_{Sp>2} + \langle \text{Re}(k_B) \rangle_{Sp<2}$ (то есть усреднение по действительной части ведется только по реализации, для которых это имеет смысл, также и для мнимой части).

В работе [7] было показано, что $\text{Im} \langle k_i \rangle - \langle \text{Im} k_B \rangle \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$, но поскольку (как также показано в [7]) мера запрещённых зон стремится к единице, то

$\text{Im}\langle k_i \rangle - \langle \text{Im}(k_B) \rangle_{Sp>2, L \rightarrow \infty} \rightarrow 0$. Таким образом, для мнимых частей выполнено $\langle k_i \rangle - \langle k_B \rangle_{L \rightarrow \infty} \rightarrow 0$.

Соотношение типа Крамерса-Кронинга для волнового вектора. Поскольку k и γ самоусредняются и имеют ясный физический смысл, особый интерес представляет возможная связь между ними.

Несложно заметить, что коэффициент прохождения является аналитической функцией частоты. Действительно, Т-матрица всей системы может быть записана через коэффициенты прохождения и отражения [219]:

$$T = \begin{pmatrix} t - \frac{r_L r_R}{t} & -\frac{r_L}{t} \\ \frac{r_R}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix},$$

где r_L и r_R – коэффициенты отражения справа и слева (коэффициент прохождения не зависит от направления). С другой стороны, Т-матрица всей системы является произведением отдельных Т-матриц однородных слоёв и все элементы этих Т-матриц являются аналитическими функциями частоты. Таким образом, коэффициент прохождения, являясь дробно-рациональной функцией от этих элементов, является также аналитической функцией частоты. Следовательно, аналитической функцией частоты является также и

$$\frac{1}{t} \frac{dt}{d\omega} = \frac{d \ln(t)}{d\omega} = \frac{dk_{eff}}{d\omega},$$

следовательно,

$$\frac{d \text{Im}(k(\omega_{eff}))}{d\omega} = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \text{Re}(k_{eff}(u))}{u - \omega} du,$$

$$\frac{d\gamma(\omega)}{d\omega} = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk(u)}{u - \omega} du.$$

Учитывая четность $k(-\omega) = -k(\omega)$ (следовательно $\frac{dk}{d\omega}$ – четная функция), и то,

что $\frac{dk}{d\omega}$ – не что иное, как плотность состояний $\rho(u)$, получим

$$\frac{d\gamma(\omega)}{d\omega} = v.p. \int_0^{+\infty} \frac{\omega \rho(u)}{u^2 - \omega^2} du.$$

Или если проинтегрировать по частоте, получим известную формулу Джоноса-Хубердта-Таулесса [1, 220]

$$\gamma(\omega) = v.p. \int_0^{+\infty} \left| 1 - \frac{\omega^2}{u^2} \right| \rho(u) du.$$

Заключение

Диссертационная работа посвящена исследованию мезоскопических эффектов, возникающих при распространении электромагнитного излучения в неоднородных структурах. В качестве таких структур выступают диэлектрические среды, как периодические, так и неупорядоченные, состоящие из различных компонентов. В качестве компонентов этих сред были рассмотрены изотропные, анизотропные и гиротропные диэлектрики. Изучение данного класса объектов представляет интерес как с точки зрения наблюдения новых фундаментальных эффектов, не проявляющихся в однородных материалах, так и с точки зрения их практического применения, в частности, в устройствах оптоэлектроники.

Выводы

По главе 1.

1. Для 2D фотонных кристаллов показано, что благодаря пространственной дисперсии есть точки – точки нулевой эффективной анизотропии, где эффект Фарадея не подавлен анизотропией ФК. Таким образом, при определенных условиях, сочетание всех трех свойств 2D МФК – анизотропии, пространственной дисперсии и МО приводит к возникновению эффекта Фарадея.
2. Намагничивание анизотропного ФК приводит к гибридизации ТЕ и ТМ блоховских волн с образованием особой блоховской волны обладающей различной поляризацией в разных точках пространства. Более того, гибридная блоховская волна содержит гармоники разной поляризации (в том числе как право-, так и лево- поляризованные), что делает невозможным приписать всему решению какую-либо единую поляризацию.
3. Гибридную блоховскую волну невозможно описать в рамках скалярного адмитанса.

По главе 2.

1. В фотонном кристалле, обладающем анизотропией и содержащем магнитооптические компоненты, формируются поляризационно вырожденные запрещенные зоны. В качестве примера такого ФК может выступать двумерный фотонный кристалл из изотропных компонентов, или слоистый ФК, содержащий в качестве одного из компонентов анизотропный материал. При этом поляризационно вырожденная запрещенная зона возникает одновременно для обоих собственных решений (обеих поляризаций) и формируется внутри бриллюэновской зоны.
2. Вырожденная граница запрещенной зоны возникает тогда, когда происходит касание границы бриллюэновской запрещенной зоны и границы вырожденной запрещенной зоны. То есть вырожденная граница запрещенной зоны формируется тогда, когда в ФК некоторая частота (которая и будет частотой вырожденной границы 33) является одновременно границей бриллюэновской и вырожденной запрещенных зон.
3. Таким образом, для ФК, в котором одновременно могут формироваться вырожденные запрещенные зоны разных типов, ширина вырожденной запрещенной зоны, возникающей под действием обоих механизмов, складывается по «теореме Пифагора» из ширин запрещенных зон для каждого механизма в отдельности. При этом не требуется знания каких-либо дополнительных характеристик ФК.
4. На границах вырожденной запрещенной зоны не наблюдается эффект Бормана.
5. Показано, что в периодически намагниченной анизотропной среде вблизи точки эффективной изотропии формируется относительно большая вырожденная запрещенная зона (шириной порядка недиагонального элемента диэлектрической проницаемости $q \ll 1$), а вдали от эффективной

изотропии возникает относительно малая блиллюэновская зона (шириной порядка q^2).

6. Предложен управляемый внешним электрическим полем оптический фильтр на основе планарного гофрированного волновода из электрооптического материала. Работа данного фильтра основана на управлении вырожденной запрещенной зоной, возникающей в результате связи ТЕ и ТМ мод благодаря наведенной внешним полем анизотропии материала волновода.

По главе 3.

1. В системе фотонный кристалл – слой материала с отрицательной диэлектрической проницаемостью, например, слой золота, может существовать поверхностное состояние, являющееся оптическим аналогом таммовского состояния.
2. Если фотонный кристалл, участвующий в формировании таммовского оптического состояния имеет магнитооптические компоненты, то на частоте таммовского состояния происходит усиление фарадеевского вращения.
3. Теоретически показана возможность управления частотой таммовского состояния при помощи внешнего магнитного поля. В СВЧ области при намагничивании сдвиг частоты таммовского пика прозрачности достигает 10%.
4. При формировании таммовского состояния в области частот поляризационно вырожденной запрещенной зоны, таммовское состояние не расщепляется (на право- и лево-поляризованное) и не сдвигается по частоте при намагничивании системы. При этом возможно управление интенсивностью пика прозрачности, соответствующего таммовскому состоянию, при помощи внешнего магнитного поля.

По главе 4.

1. Показано, что в двумерном магнито-фотонном кристалле возможна реализация эффекта магнитной суперпризмы (существенного отклонения распространения света при изменении намагниченности образца).
2. Показано, что эффект суперпризмы (существенного отклонения направления распространения прошедшей волны, при малом отклонении направления падающей волны) можно реализовать на слоистой системе с нанесенной на ее поверхность дифракционной решеткой.
3. Показано, что при одинаковом контрасте диэлектрической проницаемости 1D фотонные кристаллы обладают более «резкой» границей разрешенной и запрещенной зон по сравнению с 2D и 3D фотонными кристаллами. Таким образом, 1D фотонные кристаллы обладают принципиальным преимуществом по сравнению с 2D и 3D для наблюдения эффекта суперпризмы.
4. Показано, что эффект магнитной суперпризмы можно реализовать в слоистой системе.

По главе 5.

1. Показано, что в системе слоев с одинаковым характеристическим адмитансом может наблюдаться андерсоновская локализация света при падении под углом, что проявляется в экспоненциальном спаде коэффициента прохождения с толщиной. Масштаб этого экспоненциального спада — длина локализации — не зависит от поляризации, несмотря на то, что в отдельной реализации коэффициент прохождения различен для разных поляризаций.
2. Показано, что по мере распространения в глубь системы анизотропных слоев со случайной ориентацией осей анизотропии волна «забывает» о своей изначальной поляризации. Существует характерный масштаб толщины случайной системы, на котором волна теряет информацию о своей изначальной линейной поляризации, и распределение поляризации волны,

прошедшей через достаточно толстый отрезок случайной системы, оказывается независимым от поляризации падающей на систему волны. Данный масштаб длины является характеристикой случайной системы, не зависящей от другого масштаба – длины локализации. Причем стохастизация поляризации имеет место при наличии сколь угодно малого разброса ориентаций осей анизотропии.

3. Численное исследование показало, что анизотропия компонентов играет заметную роль в андерсоновской локализации света в периодических в среднем структурах. В частности, в слоистой структуре из одноосных кристаллов ориентационный беспорядок осей анизотропии приводит к качественной особенности: формированию локального максимума индекса Ляпунова на частотах, находящихся вдали от запрещенных зон соответствующей строго периодической системы. Величина пика возрастает с ростом разброса ориентаций оптических осей слоев.
4. Появление пика обусловлено возникновением особого типа брэгговских отражателей на частотах вырожденных запрещенных зон. Равенство индексов Ляпунова на частотах пика для двух взаимно перпендикулярных поляризаций падающих на систему волн можно объяснить тем, что волна по мере прохождения в глубь случайной системы «забывает» о своей изначальной поляризации, причем это происходит на глубине, значительно меньшей длины локализации.

По главе 6.

1. Для двумерных неоднородных сред введение эффективных параметров справедливо лишь с точностью до второго порядка отношения масштаба неоднородности к длине волны. Учет дальнейших членов приводит к нарушению френелевских законов преломления. Сравнивая полученные эффективные параметры с расчётами Рытова, отметим, что они совпадают только в нулевом порядке (члены второго порядка уже отличаются).

2. Введение дополнительных поверхностных токов устраняет мезоскопическое поведение эффективного импеданса (как и его мнимую часть в случае асимметричных образцов) ценой добавления дополнительных эффективных параметров – электрических и магнитных поверхностных проводимостей, имеющих ясный физический смысл. Новые параметры зависят от характеристик слоев на поверхности образца и не зависят от толщины образца.
3. В слоистых системах (как в случайных, так и в упорядоченных) эффективный показатель преломления самоусредняется при любых соотношениях длины волны и размера неоднородности.
4. Показано, что самоусреднение индекса Ляпунова является частью более общего явления – гомогенизации волнового вектора k_{eff} . Показано, что существует соотношение, аналогичное соотношению Крамерса-Кронинга (но не для диэлектрической проницаемости, а для эффективного волнового вектора k_{eff}), которое приводит к известному соотношению Джоноса-Хубердта-Таулесса.

Список основных публикаций

1. A.P. Vinogradov, A.M. Merzlikin, Band gap theory of localization in one-dimensional system// Phys. Rev. E. – 2004. – Vol. 70. – p. 026610.
2. А.П. Виноградов, А.М. Мерзликин, Брэгговское отражение как механизм одномерной локализации света// Доклады Академии Наук. – 2004. – Т. 398. – С. 44.
3. A.M. Merzlikin, A.P. Vinogradov, M. Inoue A.B. Granovsky, Giant photonic Hall Effect in magneto-photonic crystals// Phys. Rev. E. – 2005. – Vol. 72. – p. 046603.
4. A.P. Vinogradov, A.M. Merzlikin, A.B. Granovsky, M. Inoue, and A.B. Khanikaev, Superprism Effect in Magneto-Photonic Crystals// Magneto-Optical Materials for Photonics and Recording. – 2004. – Vol. 834.
5. A.M. Merzlikin, A.P. Vinogradov, M. Inoue, A.B. Khanikaev, A.B. Granovsky, The Faraday effect in two dimensional magneto-photonic crystals// Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2006. – Vol. 300. – p. 108.
6. A.M. Merzlikin, A.P. Vinogradov, Superprism effect in 1D photonic crystal// Optics Comm. – 2006. – Vol. 259. – p. 700.
7. A.P. Vinogradov, A.V. Dorofeenko, S.G. Erokhin, M. Inoue, A.A. Lisyansky, A.M. Merzlikin, and A.B. Granovsky, Surface State Peculiarities at One-Dimensional Photonic Crystal Interfaces// Phys. Rev. B. – 2006. – Vol. 74. – p. 045128.
8. A.M. Merzlikin, A.P. Vinogradov, A.V. Dorofeenko, M. Inoue, M. Levy and A.B. Granovsky, Controllable Tamm states in magnetophotonic crystal// Physica B: Condensed Matter. – 2007. – Vol. 394. – p. 277.
9. T. Goto, A.V. Dorofeenko, A.M. Merzlikin, A.V. Baryshev, A.P. Vinogradov, M. Inoue, A.A. Lisyansky, and A.B. Granovsky, Optical Tamm states in one-dimensional magnetophotonic structures// Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 101. – p. 113902.

10. А.П. Виноградов, А.М. Мерзликин, А.А. Лактионов, Механизм возникновения запрещенных зон в одномерных фотонных кристаллах// Радиотехника и Электроника. – 2008. – Т. 53. – С. 941.
11. А.М. Мерзликин, А.П. Виноградов, А.Б. Грановский, М. Инуэ, Эффект «суперпризмы» в одномерном магнитофотонном кристалле// Физика Твердого Тела. – 2008. – Т. 5. – С. 838.
12. А.М. Мерзликин, Ф. Винай, Распространение волн в одномерном магнитофотонном кристалле на основе нанопористого метаматериала// Радиотехника и Электроника. – 2009. – Т. 54. – С. 559.
13. А.М. Merzlikin, Miguel Levy, A.A. Jalali, and A.P. Vinogradov, Polarization degeneracy at Bragg reflectance in magnetized photonic crystals// Phys. Rev. B. – 2009. – Vol. 79. – p. 195103.
14. S.I. Tarapov, M. Khodzitskiy, S.V. Chernovtsev, D. Belosorov, A.M. Merzlikin, A.P. Vinogradov, A.B. Granovsky and M. Inoue, The mm W band Tamm states in one-dimensional magnetophotonic crystals// Solid State Phenomena. – 2009. – Vol. 152. – p. 394.
15. T. Goto, A.V. Baryshev, M. Inoue, A.V. Dorofeenko, A.M. Merzlikin, A.P. Vinogradov, A.A. Lisyansky, and A.B. Granovsky, Tailoring surfaces of one-dimensional magnetophotonic crystals: Optical Tamm state and Faraday rotation// Phys. Rev. B. – 2009. – Vol. 79. – p. 125103.
16. Д.П. Белозоров, М.К. Ходзинский, С.И. Тарапов, А.М. Мерзликин, А.П. Виноградов, А.В. Дорофеев, А.Б. Грановский, Особенности Таммовских состояний магнитофотонных кристаллов в сверхвысокочастотном диапазоне// Материаловедение. – 2009. – Т. 5. – С. 22.
17. А.М. Merzlikin, A.P. Vinogradov, A.N. Lagarkov, M. Levy, D.J. Bergman, Y.M. Strelniker, Peculiarities of the Tamm state formed in degenerate photonic band gaps// Physica B. – 2010. – Vol. 405. – p. 2986.

- 18.С.И. Тарапов, М. Ходзитский, С.В. Черновцев, Д. Белозоров, А.М. Мерзликин, А.В. Дорофеев, А.П. Виноградов, М. Иноуе и А.Б. Грановский, Управление частотой таммовского состояния в магнито-фотонном кристалле// Физика твердого тела. – 2010. – Т. 52. – С. 1332.
- 19.Н.А. Енкин, А.М. Мерзликин, А.П. Виноградов, Отклонение законов преломления от Френелевских в композитных материалах// Радиотехника и Электроника. – 2010. – Т. 55. – С. 1.
- 20.А.М. Merzlikin, M. Levy, A.P. Vinogradov, Z. Wu, A.A. Jalali, Band gaps in periodically magnetized homogeneous anisotropic media// Optics Communications. – 2010. – Vol. 283. – p. 4298.
- 21.А.П. Виноградов, А.В. Дорофеев, А.М. Мерзликин, А.А. Лисянский, Поверхностные состояния в фотонных кристаллах// УФН. – 2010. – Т. 180. – С. 249.
- 22.Z. Wu, Miguel Levy, V.J. Fratello and A.M. Merzlikin, Gyrotropic Photonic Crystal Waveguide Switches// Applied Physics Letters. – 2010. – Vol. 96. – p. 051125.
- 23.А.В. Барышев, М.Е. Докукин, А.М. Мерзликин, М. Иноуе, Распространение поляризованного света в опалах: амплитудная и фазовая анизотропия// ЖЭТФ. – 2011. – Т. 139. – С. 419.
- 24.А.И. Ignatov, A.M. Merzlikin, and A.P. Vinogradov, A.A. Lisyansky, Effect of polarization upon light localization in random layered magnetodielectric media// Phys. Rev. B. – 2011. – Vol. 83. – p. 224205.
- 25.А.И. Ignatov, A.M. Merzlikin and Miguel Levy, Linkage between anisotropic and gyrotropic degenerate bandgaps// J. Opt. Soc. Am. B. – 2011. – Vol. 28. – P. 1911.
- 26.A. Chakravarty, M. Levy, A.A. Jalali, Z. Wu, and A.M. Merzlikin, Elliptical normal modes and stop band reconfiguration in multimode birefringent one-dimensional magnetophotonic crystals// Phys. Rev. B. – 2011. – Vol. 84. – p. 094202.

- 27.А.И. Игнатов, А.М. Мерзликин, А.П. Виноградов, Формирование замороженной моды k^4 // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). – 2011. – Т.1. – С. 0421100114\0002.
- 28.А.И. Игнатов, А.М. Мерзликин, Управляемый электрическим полем волноводный фильтр Шольца// Журнал Радиоэлектроники (электронный журнал). – 2011. – Т. 9. – С. 0421100114\0063.
- 29.А.И. Игнатов, А.М. Мерзликин, Особенности андерсоновской локализации света в периодических в среднем системах на основе анизотропных компонент// Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56. – С. 856.
- 30.A.P. Vinogradov, A.I. Ignatov, A.M. Merzlikin, S.A. Tretyakov, C.R. Simovski, Additional effective medium parameters for composite materials (excess surface currents)// Optics Express. – 2011. – Vol. 19. – p. 6699.
- 31.А.И. Игнатов, А.М. Мерзликин, А.П. Виноградов, Локализация света при падении под углом на случайную слоистую систему магнитодиэлектриков// Наносистемы: физика, химия, математика. – 2011. – Т. 2. – С. 40.
- 32.А.М. Мерзликин, М.В. Лазарев, Особенности формирования запрещённых зон в одномерных фотонных кристаллах большого контраста// Журнал Радиоэлектроники (электронный журнал). – 2011. – Т.9. – С. 0421100114\0060
- 33.A.I. Ignatov, A.M. Merzlikin, M. Levy and A.P. Vinogradov, Formation of Degenerate Band Gaps in Layered Systems// Materials. – 2012. – Vol. 5. – p. 1055.
- 34.A.P. Vinogradov, A.M. Merzlikin, Comment to the article "Basics of averaging of the Maxwell equations for bulk materials" by A. Chipouline, C. Simovski and S. Tretyakov.// Metamaterials. – 2012. – Vol. 6. – p. 121.

Список литературы.

- [1]. P. Sheng, Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena. – Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [2]. T. Goto, A.V. Baryshev, M. Inoue, A.V. Dorofeenko, A.M. Merzlikin, A.P. Vinogradov, A.A. Lisyansky, and A.B. Granovsky, Tailoring surfaces of one-dimensional magnetophotonic crystals: Optical Tamm state and Faraday rotation// Phys. Rev. B. -2009. – Vol. 79. – p. 125103.
- [3]. R. Frank, A. Lubatsch, Scalar wave propagation in random amplifying media: Influence of localization effects on length and time scales and threshold behavior// Phys. Rev. A. – 2011. – Vol. 84. – p. 013814.
- [4]. Y. Lahini, Y. Bromberg, Y. Shechtman, A. Szameit, D.N. Christodoulides, R. Morandotti, and Y. Silberberg, Hanbury Brown and Twiss correlations of Anderson localized waves// Phys. Rev. A. – 2011. – Vol. 84. – p. 041806.
- [5]. J.E. Sipe, P. Sheng, B.S. White, and M.H. Cohen, Brewster anomalies: A polarization-induced delocalization effect// Phys. Rev. Lett. – 1988. – Vol. 60. – p. 108.
- [6]. P. Yeh, Electromagnetic propagation in birefringent layered media// J. Opt. Soc. Am. – 1979. – Vol. 69. – p. 742.
- [7]. A.P. Vinogradov, A.M. Merzlikin, Band gap theory of localization in one-dimensional system// Phys. Rev. E. – 2004. – Vol. 70. – p. 026610.
- [8]. S. Mito, H. Takagi, P. B. Lim, A. V. Baryshev and M. Inoue, Spatial light phase modulators with one-dimensional magnetophotonic crystals driven by piezoelectric films// J. Appl. Phys. –2011. – Vol. 109. – p. 07E313.
- [9]. Z. Wang and S. Fan, Optical circulators in two-dimensional magneto-optical photonic crystals// Optics Letters. – 2005. – Vol. 30. – p. 1989.
- [10]. M. Inoue, H. Uchida, P. B. Lim, A. V. Baryshev, A. V. Khanikaev, Magnetophotonic Crystals: Now and Future// Advances in Science and Technology. – 2006. – Vol. 45. – p. 2588.

- [11]. M.A. Kaliteevski, D.M. Beggs, S. Brand, R.A. Abram, and V.V. Nikolaev, Stability of the photonic band gap in the presence of disorder// *Phys. Rev. B.* – 2006. – Vol. 73. – p. 033106.
- [12]. Н.С. Бахвалов, Г.П. Панасенко, Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. – Москва: Наука, 1984.
- [13]. D.J. Bergman, The dielectric constant of a composite material—A problem in classical physics// *Phys. Rep.* – 1978. – Vol. 43. – p. 377.
- [14]. M. Inoue, T. Fujii, A theoretical analysis of magneto-optical Faraday effect of YIG films with random multilayer structures// *J. Appl. Phys.* – 1997. – Vol. 81. – p. 5659.
- [15]. A.P. Vinogradov, A.V. Dorofeenko, S.G. Erokhin, M. Inoue, A.A. Lisyansky, A.M. Merzlikin, A.B. Granovsky, Surface state peculiarities in one-dimensional photonic crystal interfaces// *Phys. Rev. B.* – 2006. – Vol. 74. – p. 045128.
- [16]. A.M. Merzlikin, A.P. Vinogradov, A.V. Dorofeenko, M. Inoue, M. Levy, A.B. Granovsky, Controllable Tamm states in magnetophotonic crystal// *Physica B.* – 2007. – Vol. 394. – p. 277.
- [17]. T. Goto, A.V. Dorofeenko, A.M. Merzlikin, A.V. Baryshev, A.P. Vinogradov, M. Inoue, A.A. Lisyansky, A.B. Granovsky, Optical tamm states in one-dimensional magnetophotonic structures// *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – Vol. 101. – p. 113902.
- [18]. A.M. Merzlikin, A.P. Vinogradov, M. Inoue, A.B. Khanikaev, A.B. Granovsky, The Faraday effect in two-dimensional magneto-photonic crystals// *J. Magn. Magn. Mater.* – 2006. – Vol. 300 – p. 108.
- [19]. A.M. Merzlikin, A.P. Vinogradov, A.N. Lagarkov, M. Levy, D.J. Bergman, Y.M. Strelniker, Peculiarities of Tamm states formed in degenerate photonic band gaps// *Physica B.* – 2010. – Vol. 405. – p. 2986.

- [20]. M. Levy, A.A. Jalali, Band structure and Bloch states in birefringent one-dimensional magnetophotonic crystals: An analytical approach// J. Opt. Soc. Am. B. – 2007. – Vol. 24. – p. 1603.
- [21]. A.A. Jalali, M. Levy, Local normal-mode coupling and energy band splitting in elliptically birefringent one-dimensional magnetophotonic crystals// J. Opt. Soc. Am. B. – 2008. – Vol. 25. – p. 119.
- [22]. H.-X. Da, Z.-G. Huang, Z.Y. Li, Electrically controlled optical Tamm states in magnetophotonic crystal based on nematic liquid crystals// Opt. Lett. – 2009. – Vol. 34. – p. 1693.
- [23]. F. Wang, A.Lakhtakia, Intra-Brillouin-zone bandgaps due to periodic misalignment in one-dimensional magnetophotonic crystals// Appl. Phys. Lett. – 2008. – Vol. 92. –p. 011115.
- [24]. F. Wang, A. Lakhtakia, Magnetically controllable intra-Brillouin-zone band gaps in one-dimensional helicoidal magnetophotonic crystals// Phys. Rev. B. – 2009. – Vol. 79. – p. 193102.
- [25]. A.M. Merzlikin, M. Levy, A.A. Jalali, A.P. Vinogradov, Polarization degeneracy at Bragg reflectance in magnetized photonic crystals// Phys. Rev. B. – 2009. – Vol. 79. – p. 195103.
- [26]. P. Bertrand, C. Hermann, G. Lampel, J. Peretti, V.I. Safarov, General analytical treatment of optics in layered structures: Application to magneto-optics// Phys. Rev. B. – 2001. – Vol. 64. – p. 235421.
- [27]. A. Figotin, I. Vitebskiy, Frozen light in photonic crystals with degenerate band edge// Phys. Rev. E. – 2006. – Vol. 74. – p. 066613.
- [28]. A. Vinogradov, S. Erokhin, A. Granovsky, M. Inoue, Investigation of the Faraday effect in multilayer one-dimensional structures// J. Commun. Technol. Electron. – 2004. – Vol. 49. – p. 88.
- [29]. A. Vinogradov, S. Erokhin, A. Granovsky, M. Inoue, The polar Kerr effect in multilayer systems (magnetophotonic crystals)// J. Commun. Technol. Electron. – 2004. – Vol. 49. – p. 682.

- [30]. A.B. Khanikaev, A.B. Baryshev, P.B. Lim, H. Uchida, M. Inoue, A.G. Zhdanov, A.A. Fedyanin, A.I. Maydykovskiy, O.A. Aktsipetrov, Nonlinear Verdet law in magnetophotonic crystals: Interrelation between Faraday and Borrmann effects// *Phys. Rev. B.* – 2008. – Vol. 78. – p. 193102.
- [31]. A. Figotin, I. Vitebskiy, Electromagnetic unidirectionality in magnetic photonic crystals// *Phys. Rev. B.* – 2003. – Vol. 67. – p. 165210.
- [32]. J. Ballato, A. Ballato, A. Figotin, I. Vitebskiy, Frozen light in periodic stacks of anisotropic layers// *Phys. Rev. E.* – 2005. – Vol. 71. – p. 036612.
- [33]. V.M. Agranovich, V.L. Ginzburg, *Spatial Dispersion in Crystal Optics and the Theory of Excitons*, – New York: Interscience, 1966.
- [34]. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, третье издание, – Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1992.
- [35]. A.K. Zvezdin, V.A. Kotov, *Modern magnetooptics and magnetooptical materials*, – Bristol: IOP Publishing, 1997.
- [36]. W.J. Tabor, F.S. Chen, Electromagnetic propagation through materials possessing both Faraday rotation and birefringence: Experiments with ytterbium orthoferrite// *J. Appl. Phys.* – 1969. – Vol. 40. – p. 2760.
- [37]. А.П. Виноградов, А.М. Мерзликин, Электродинамические свойства мелкослоистой среды// *Доклады Академии Наук.* – 2001. – Т. 381. – С. 1.
- [38]. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, – Москва: Наука, 1973.
- [39]. A. Figotin, I. Vitebskiy, Oblique frozen modes in periodic layered media// *Phys. Rev. E.* – 2003. – Vol. 68. – p. 036609.
- [40]. A. Figotin, I. Vitebskiy, Nonreciprocal magnetic photonic crystals// *Phys. Rev. E.* – 2001. – Vol. 63. – p. 066609.
- [41]. С.М. Рытов, *Акустические свойства мелкослоистой среды*// *Акуст. Журнал.* – 1956. – Т. 2. – С. 71.
- [42]. А. П. Виноградов, А. В. Дорофеев, Блоховские волны ближнего поля в фотонных кристаллах// *РиЭ.* – 2005. – Т. 50. – С. 1246.

- [43]. A. Yariv and P. Yeh, Optical waves in crystals, – New York: Wiley, 1984.
- [44]. I. Šolc, A new kind of double refracting filter// Czech. J. Phys. – 1954. – Vol. 4. – p. 65.
- [45]. R. Zengerle, Light propagation in single and doubly periodic planar waveguides// J. Mod. Opt. – 1987. – Vol. 34. – p. 1589.
- [46]. E. Cojocaru, Forbidden gaps in periodic anisotropic layered media// Appl. Opt. – 2000. – Vol. 39. – p. 4641.
- [47]. G. Shabtay, E. Eidinger, Z. Zalevsky, D. Mendlovic, E. Marom, Tunable birefringent filters — optimal iterative design// Optics Express. – 2002. – Vol. 10. – p. 1534.
- [48]. M. Levy, A. A. Jalali, Z. Zhou, N. Dissanayake, Bandgap formation and selective suppression of Bloch states in birefringent gyrotropic Bragg waveguides// Optics Express. – 2008. – Vol. 16. – p. 13421.
- [49]. A.I. Ignatov, A.M. Merzlikin, M. Levy, A.P. Vinogradov, Formation of Degenerate Band Gaps in Layered Systems// Materials. – 2012. – Vol. 5. – p. 1055.
- [50]. A. Figotin and I. Vitebskiy, Gigantic transmission band-edge resonance in periodic stacks of anisotropic layers// Phys. Rev. E. – 2005. – Vol. 72. – p. 036619.
- [51]. S.G. Johnson, J.D. Joannopoulos, Photonic Crystals. The Road from Theory to Practice, – Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [52]. S. Erokhin, A. Vinogradov, A. Granovsky, M. Inoue, Field distribution of a light wave near a magnetic defect in one-dimensional photonic crystals// Phys. Solid State. – 2007. – Vol. 49. – p. 497.
- [53]. A. Figotin, I. Vitebskiy, Absorption suppression in photonic crystals// Phys. Rev. B. – 2008. – Vol. 77. – p. 104421.
- [54]. A.P. Vinogradov, Yu.E. Lozovik, A.M. Merzlikin, A.V. Dorofeenko, I. Vitebskiy, A. Figotin, A.B. Granovsky, A.A. Lisyansky, Inverse Borrmann effect in photonic crystals// Phys. Rev. B. – 2009. – Vol. 80. – p. 235106.

- [55]. J.D. Joannopoulos, S.G. Johnson, J.N. Winn, R.D. Meade, Photonic Crystals. Molding the Flow of Light, 2nd ed., – Princeton: Princeton University Press, 2008.
- [56]. А. Ярив, П. Юх, Оптические волны в кристаллах, – Москва: Мир, 1987.
- [57]. Б.З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами, – Москва: Изд. академии наук СССР, 1961.
- [58]. C. M. Soukoulis, Photonic Band Gap Materials, – Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [59]. Н. Kosaka, Т. Kawashima, А. Tomita, М. Notomi, Т. Tamamura, Т. Sato, S. Kawakami, Superprism phenomena in photonic crystals// Phys. Rev. B. – 1998. – Vol. 58. – p. R10096.
- [60]. Т. Baba, Т. Matsumoto, Resolution of photonic crystal superprism.// Appl. Phys. Lett. – 2002. – Vol.81. – p. 4.
- [61]. А.М. Merzlikin, А.Р. Vinogradov, Superprism effect in 1D photonic crystal// Optics Communications. – 2005. – Vol. 259. – p. 600.
- [62]. P.A. Belov, C.R. Simovski and P. Ikonen, Canalization of subwavelength images by electromagnetic crystals// Phys. Rev. B. – 2005. – Vol. 71. – p. 193105.
- [63]. S. John, Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices// Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 58. – p. 2486.
- [64]. M.V. Berry, S. Popescu, Evolution of quantum superoscillations and optical superresolution without evanescent waves// J. Phys. A. – 2006. – Vol. 39. – p. 6965.
- [65]. M.V. Berry, Evanescent and real waves in quantum billiards and Gaussian beams// J. Phys. A. – 1994. – Vol. 27. – p. L391.
- [66]. A. Kempf and P.J.S.G. Ferreira, Unusual properties of superoscillating particles// J. Phys. A. – 2004. – Vol. 37. – p. 12067.
- [67]. P.J.S.G. Ferreira, A. Kempf, Superoscillations: Faster Than the Nyquist Rate// IEEE Trans. on Signal Processing. – 2006. – Vol. 54. – p. 3732.

- [68]. I. Tamm, A possible kind of electron binding on crystal surfaces// *Phys. Z. Sowjetunion*. –1932. – Vol. 1. – p. 733.
- [69]. И.М. Лифшиц, С.И. Пекар, Таммовские связанные состояния электронов на поверхности кристалла и поверхностные колебания атомов решётки// *УФН*. – 1955. – Т. 56. – С. 531.
- [70]. A. Kavokin, I. Shelykh, G. Malpuech, Optical Tamm states for the fabrication of polariton lasers// *Appl. Phys. Lett.* – 2005. – Vol. 87. – p. 261105.
- [71]. A. Kavokin, I. Shelykh, G. Malpuech, Lossless interface modes at the boundary between two periodic dielectric structures// *Phys. Rev. B*. – 2005. – Vol. 72. – p. 233102.
- [72]. F. Villa and J.A. Gaspar-Armenta, Electromagnetic surface waves: photonic crystal-photonic crystal interface// *Optics Communications* – 2003. – Vol. 223. – p. 109.
- [73]. F. Villa and J.A. Gaspar-Armenta, Photonic crystal to photonic crystal surface modes: narrow-bandpass filters// *Opt. Express*. – 2004. – Vol. 12. – p. 2338.
- [74]. J-Y. Guo, Y. Sun, H-Q. Li, Y-W. Zhang and H. Chen, Optical Tamm states in dielectric photonic crystal heterostructure.// *Chin. Phys. Lett.* – 2008. – Vol. 25. – p. 2093.
- [75]. M. Kaliteevski, I. Iorsh, S. Brand, R.A. Abram, J.M. Chamberlain, A.V. Kavokin, I.A. Shelykh, Tamm plasmon-polaritons: Possible electromagnetic states at the interface of a metal and a dielectric Bragg mirror// *Phys. Rev. B*. – 2007. – Vol. 76. – p. 165415.
- [76]. S. Brand, M.A. Kaliteevski, R.A. Abram, Optical Tamm states above the bulk plasma frequency at a Bragg stack/metal interface// *Phys. Rev. B*. – 2009. – Vol. 79. – p. 085416.
- [77]. А.Г. Гуревич, Г.А. Мелков, Магнитные колебания и волны, – Москва: Наука, 1994.
- [78]. В.П. Абрамов, В.А. Дмитриев, С.А. Шелухин, Невзаимные устройства на ферритовых резонаторах, – Москва: Радио и связь, 1989.

- [79]. T. Baba and M. Nakamura, Photonic Crystal Light Deflection Devices Using the Superprism Effect// IEEE J. Quantum Electron. – 2002. – Vol. 38. – p. 909.
- [80]. L. Wu, M. Mazilu, T. Karle, and T. F. Krauss, Superprism phenomena in planar photonic crystals// IEEE J. Quantum Electron. – 2002. – Vol. 38. – p. 915.
- [81]. C. Luo, M. Soljaèic, and J. D. Joannopoulos, Superprism effect based on phase velocities// Opt. Lett. – 2004. – Vol. 29. – p. 745.
- [82]. P.A. Belov, S.A. Tretyakov, and A.J. Viitanen, Nonreciprocal microwave band-gap structures// Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 66. – p. 016608.
- [83]. A.M. Merzlikin, A.P. Vinogradov, M. Inoue A.B. Granovsky, Giant photonic Hall Effect in magneto-photonic crystals// Phys. Rev. E. – 2005. – Vol. 72. – p. 046603.
- [84]. А.П. Виноградов, А.А. Калачев, А.Н. Лагарьков, Е.В. Романенко, Г.В Казанцева, Эффекты пространственной дисперсии в композитных материалах в СВЧ-диапазоне// ДАН. – 1996. – Т. 349. – С. 182.
- [85]. C.M. Soukoulis, Photonic Crystals and Light Localization in the 21th Century, – Dordrecht: Kluwer, 2001.
- [86]. V.V. Shalaev, Optical properties of Nanostructured Random Media, – Berlin: Springer, 2010.
- [87]. P.W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices// Phys. Rev. – 1958. – Vol. 109. – p. 1492.
- [88]. S. John. Electromagnetic absorption in a disordered medium near a photon mobility edge// Phys. Rev. Lett. – 1984. – Vol. 53. – p. 2169.
- [89]. H. Furstenberg. Noncommuting random products// Trans. Am. Math. Soc. – 1963. – Vol. 108. – p. 377.
- [90]. F.M. Izrailev, N.M. Makarov, Localization in correlated bilayer structures: from photonic crystals to metamaterials and semiconductor superlattices// Phys. Rev. Lett. – 2009. – Vol. 102. – p. 203901.

- [91]. M. Born and E. Wolf, Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 7th ed., – Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [92]. X. Du, D. Zhang, X. Zhang, B. Feng, D. Zhang, Localization and delocalization of light under oblique incidence// Phys. Rev. B. – 1997. – Vol. 56. – p. 28.
- [93]. E. Abrahams, P.W. Anderson, D.C. Licciardello and T.V. Ramakrishnan, Scaling Theory of Localization: Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions// Phys. Rev. Lett. – 1979. – Vol. 42. – p. 673.
- [94]. P.W. Anderson, D.J. Thouless, E. Abrahams, and D.S. Fisher, New method for a scaling theory of localization// Phys. Rev. B. – 1980. – Vol. 22. – p. 3519.
- [95]. L.I. Deych, D. Zaslavsky A.A. Lisyansky, Statistics of the Lyapunov Exponent in 1D Random Periodic-on-Average Systems// Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 81. – p. 5390.
- [96]. C.J. Lambert, M.F. Thorpe, Random T-matrix approach to one-dimensional localization// Phys. Rev. B. – 1983. – Vol. 27. – p. 715.
- [97]. R. E. Borland, Existence of Energy Gaps in One-Dimensional Liquids// Proc. Phys. Soc. – 1961. – Vol. 78. – p. 926.
- [98]. K. Ishii, Localization of eigenstates and transport phenomena in the one-dimensional disordered system// Prog. Theor Phys Supp. – 1973. – Vol. 53. – p. 77.
- [99]. S. John M. Stephen, Wave propagation and localization in a long-range correlated random potential// Phys. Rev. B. – 1983. – Vol. 28. – p. 6358.
- [100]. A. Crisanti, G. Paladin, A. Vulpiani, Lyapunov exponent for products of Markovian random matrices// Phys. Rev. A. – 1989. – Vol. 39. – p. 6491.
- [101]. O. Thorp, M. Ruzzene, and A. Baz, Attenuation and localization of wave propagation in rods with periodic shunted piezoelectric patches// Smart Mater. Struct. – 2001. – Vol. 10. – p. 979.

- [102]. T. Misirphashaev, C. Beenaker, Three "universal" mesoscopic Josephson effects// cond-mat. – 1996. – p. 96071119.
- [103]. C. Beenaker, Dynamics of localization in a waveguide// cond-mat. – 2000. – p. 0009061.
- [104]. J. Sanchez-Gil, V. Freilikher, A. Maradudin, I. Yurkevich, Reflection and transmission of waves in surface-disordered waveguides// Phys. Rev. B. – 1999. – Vol. 59. – p. 5915.
- [105]. M. Hjort, S. Stafstrom, Localization in quasi-one-dimensional systems// Phys. Rev. B. – 2000. – Vol. 62. – p. 5245.
- [106]. G. Samelsohn, R. Mazar, Path-integral analysis of scalar wave propagation in multiple-scattering random media// Phys. Rev. E. – 1996. – Vol. 54. – p. 5697.
- [107]. G. Samelsohn, R. Mazar, Asymptotic analysis of classical wave localization in multiple-scattering random media// Phys. Rev. E. – 1997. – Vol. 56. – p. 6095.
- [108]. C. Condat, T. Kirkpatrick, Observability of acoustical and optical localization// Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 58. – p. 226.
- [109]. G. Polatsek, O. Entin-Wohlman, Effective-medium approximation for a percolation network: The structure factor and the Ioffe-Regel criterion// Phys. Rev. B. – 1988. – Vol. 37. – p. 7726.
- [110]. M. Stockman, S. V. Faleev, D. J. Bergman, Localization versus Delocalization of Surface Plasmons in Nanosystems: Can One State Have Both Characteristics?// Phys. Rev. Lett. – 2001. – Vol. 87. – p. 167401.
- [111]. C. Wang, Effect of dielectric responses on localization in 1D random periodic-on-average systems// cond-mat. – 2001. – p. 0112457.
- [112]. S. Mudaliar, Diffuse waves in a random medium layer with rough boundaries// Wave in Random Media. – 2001. – Vol. 11. – p. 45.
- [113]. V. Baluni, J. Willemsen, Transmission of acoustic waves in a random layered medium// Phys. Rev. A. – 1985. – Vol. 31. – p. 3358.

- [114]. С.А. Градескул, В.Д. Фрейлихер, Локализация и распространение волн в случайно-слоистых средах// УФН. – 1990. – Т. 160. – С. 239.
- [115]. В.И. Кляцкин, Метод погружения в теории распространения волн, – Москва: Наука, 1986.
- [116]. V. Freilikher, M. Pustilnik I. Yurkevich, Effect of Absorption on the Wave Transport in the Strong Localization Regime// Phys. Rev. Lett. – 1994. – Vol. 73. – p. 810.
- [117]. V. Freilikher, M. Pustilnik I. Yurkevich, Wave transmission through lossy media in the strong-localization regime// Phys. Rev. B. – 1994. – Vol. 50. – p. 6017.
- [118]. A.A. Abrikosov, The paradox with the static conductivity of a one-dimensional metal// Solid State Comm. – 1981. – Vol. 37. – p. 997.
- [119]. P. Lee, Real-Space Scaling Studies of Localization// Phys. Rev. Lett. – 1979. – Vol. 42. – p. 1492.
- [120]. P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, D. S. Fisher, New method for a scaling theory of localization// Phys. Rev. B. – 1980. – Vol. 22. – p. 3519.
- [121]. D. Vollhardt P. Wolfle, Scaling Equations from a Self-Consistent Theory of Anderson Localization// Phys. Rev. Lett. – 1982. – Vol. 48. – p. 699.
- [122]. L.I. Deych, A. Yamilov A.A. Lisyansky, Scaling in one-dimensional localized absorbing systems// Phys. Rev. B. – 2001. – Vol. 64. – p. 024201.
- [123]. L. I. Deych, A. A. Lisyansky, B. L. Altshuler, Single Parameter Scaling in One-Dimensional Localization Revisited// Phys. Rev. Lett. – 1999. – Vol. 84. – p. 2678.
- [124]. P. Sheng, Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media, – Singapore: World Scientific, 1990.
- [125]. В.И. Кляцкин, Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах, – Москва: Наука ГРФМЛ, 1980.

- [126]. В.И. Кляцкин, А.И. Саичев, Статистическая и динамическая локализация плоских волн в хаотически слоистых средах// УФН. – 1992. – Т. 162. – С. 161.
- [127]. P. Luan, Z. Ye, Acoustic wave propagation in a one-dimensional layered system//Phys. Rev. E. – 2001. – Vol. 63. – p. 066611.
- [128]. P. Luan, Z. Ye, Statistics of the Lyapunov exponent in one-dimensional layered systems// Phys. Rev. E. – 2001. – Vol. 64. – p. 066609.
- [129]. Z. Ye, A. Alvarez, Acoustic Localization in Bubbly Liquid Media// Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 80. – p. 3503.
- [130]. A.R. McGurn, A.A. Maradudin, Anderson localization in one-dimensional randomly disordered optical systems that are periodic on average// Phys. Rev. B. – 1993. – Vol. 47. – p. 13120.
- [131]. V.D. Freilikher, B.A. Liansky, I.V. Yurkevich, A.A. Maradudin, A.R. McGurn, Enhanced transmission due to disorder// Phys. Rev. E. – 1995. – Vol. 51. – p. 6301.
- [132]. Л.М. Бреховских, Волны в слоистых средах, – Москва: Наука, 1973.
- [133]. В.Г. Веселаго, Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления// УФН. – 2003. – Т. 173. – С. 790.
- [134]. А.П. Виноградов, А.М. Мерзликин, К вопросу о гомогенизации одномерных систем// ЖЭТФ. – 2002. – Т. 121. – С. 565.
- [135]. D. Mogilevtsev, F.A. Pinheiro, R.R. dos Santos, S.B. Cavalcanti, L.E. Oliveira, Suppression of Anderson localization of light and Brewster anomalies in disordered superlattices containing a dispersive metamaterial// Phys. Rev.B. – 2010. – Vol. 82. – p. 081105(R).
- [136]. А.И. Игнатов, А.М. Мерзликин, Особенности андерсоновской локализации света в периодических в среднем системах на основе анизотропных компонент// Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56. – С. 856.

- [137]. A.R. McGurn, K.T. Christensen, F.M. Mueller, A.A. Maradudin, Anderson localization in one-dimensional randomly disordered optical systems that are periodic on average// Phys. Rev. B. – 1993. – Vol. 47. – p. 13120.
- [138]. P. Han, C. Zheng, Effects of structural periodicity on localization length in one-dimensional periodic-on-average disordered systems // Phys. Rev. E. – 2008. – Vol. 77. – p. 041111.
- [139]. M.A. Kaliteevski, D.M. Beggs, S. Brand, R.A. Abram, V.V. Nikolaev, Stability of the photonic band gap in the presence of disorder// Phys. Rev. B. – 2006. – Vol. 73. – p. 033106.
- [140]. V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov, A.A. Maradudin, Spectrum of waves in randomly modulated multilayers // Phys. Rev. B. – 1999. – Vol. 59. – p. 42.
- [141]. V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov, A.A. Maradudin, Effects of one- and three-dimensional inhomogeneities on the wave spectrum of multilayers with finite interface thicknesses // Phys. Rev. B. – 2001. – Vol. 65. – p. 024207.
- [142]. V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov, A.A. Maradudin, Effects of the dimensionality of inhomogeneities on the wave spectrum of superlattices // Phys. Rev. B. – 2003. – Vol. 68. – p. 024209.
- [143]. K.Yu. Blioch, V.D. Freilikher, Localization of transverse waves in randomly layered media at oblique incidence// Phys. Rev. B. – 2004. – Vol. 70. – p. 245121.
- [144]. M. Bayindir, E. Cubukcu, I. Bulu, T. Tut, E. Ozbay, C.M. Soukoulis, Photonic band gaps, defect characteristics, and waveguiding in two-dimensional disordered dielectric and metallic photonic crystals// Phys. Rev. B. – 2001. – Vol. 64. – p. 195113.
- [145]. Y-Y. Chen, Z. Ye, Acoustic Attenuation by Two-Dimensional Arrays of Rigid Cylinders// Phys. Rev. Lett. – 2001. – Vol. 87. – p. 184301.
- [146]. Yu.A. Vlasov, M.A. Kaliteevski, V.V. Nikolaev, Different regimes of light localization in a disordered photonic crystal// Phys. Rev. B. – 1999. – Vol. 60. – p.1555.

- [147]. X. Du, D. Zhang, X. Zhang, B. Feng, and D. Zhang, Localization and delocalization of light under oblique incidence// Phys. Rev. B. – 1997. – Vol. 56. – p. 28.
- [148]. M.M. Sigalas, C.M. Soukoulis, C.-T. Chan, D. Turner, Localization of electromagnetic waves in two-dimensional disordered systems// Phys. Rev. B. – 1996. – Vol. 53. – p. 8340.
- [149]. P. Yeh, A. Yariv, C.-S. Hong, Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory// Journal of the Optical Society of America. – 1977. – Vol. 67. – p. 423.
- [150]. G.W. Milton, The Theory of Composites, – Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [151]. W. Cai, V. Shalaev, Optical Metamaterials, – New York: Springer, 2010.
- [152]. C. Caloz, T. Itoh, Electromagnetic metamaterials: transmission line theory and microwave applications, – New Jersey: John Wiley & Sons Inc., Hoboken, 2007.
- [153]. A.N. Lagarkov, A.P. Vinogradov, Advances in complex electromagnetic materials//NATO ASI Series 3. High Technology. – 1997. – Vol. 28. – p. 117.
- [154]. J. E. Sipe, J. van Kranendonk, Macroscopic electromagnetic theory of resonant dielectrics// Phys. Rev. A. –1974. – Vol. 9. – p. 1806.
- [155]. R. Landauer, AIP Conference Proc. No 40 Ed. J. C. Garland, D. B. Tanner, – New York: AIP, 1978.
- [156]. A.P. Vinogradov, A.V. Aivazian, Scaling theory for homogenization of the Maxwell equations// Phys. Rev. E. – 1999. – Vol. 60. – p. 987.
- [157]. Э. Санчес-Паленсия, Неоднородные среды и теория колебаний, – Москва: Мир, 1984.
- [158]. X. Chen, T.M. Grzegorczyk, B.-I. Wu, J. Pacheco, J.A. Kong, Robust method to retrieve the constitutive effective parameters of metamaterials// Phys. Rev. E. – 2004. – Vol. **70**. – p. 016608.

- [159]. D.R. Smith, S. Schultz, P. Markos, C.M. Soukoulis, Determination of effective permittivity and permeability of metamaterials from reflection and transmission coefficients // *Phys. Rev. B.* – 2002. – Vol. 65. – p. 195104.
- [160]. Л.А. Вайнштейн, Теория дифракции. Электроника СВЧ, – Москва: Радио и связь, 1995.
- [161]. W. Śmigaj, B. Gralak, Validity of the effective-medium approximation of photonic crystals// *Phys. Rev. B.* – 2008. – Vol. 77. – p. 235445.
- [162]. W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik*, – Berlin: Teubner, 1928.
- [163]. A. Reuss, Berechnung der Fliebgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle, – ZAMM, 1929.
- [164]. С.М. Рытов, Электромагнитные свойства мелкослоистой среды// *ЖЭТФ.* – 1955. – Т. 29. – С. 5.
- [165]. Л.М. Бреховских, Волны в слоистых средах, – Москва: Издательство Академии Наук, 1957.
- [166]. М.Л. Левин, Распространение плоской электромагнитной волны в периодической слоистой среде// *ЖТФ.* – 1948. – Т. 18. – С. 1399.
- [167]. P. Yeh, A. Yariv, and Chi-Shain Hong, Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory// *J. Opt. Soc. Am.* – 1977 – Vol. 67. – p. 423.
- [168]. B. Djafari-Rouhani, J. Sapiel, Effective dielectric and photoelastic tensors of superlattices in the long-wavelength regime// *Phys. Rev. B* – 1986. – Vol. 34. –p. 7114.
- [169]. E. Akcakaya, G.W. Farnell, Effective elastic and piezoelectric constants of superlattices// *J. Appl. Phys.* –1988. – Vol. 64. – p. 4469.
- [170]. E.M. Kikkarin and D.V. Petrov, Effective elastic, piezoelectric and dielectric constants of superlattices// *Kristallografiya.* – 1989. – Vol. 34. –p. 1072.
- [171]. И.В. Семченко, Гиrotропные свойства сверхрешеток в длинноволновом приближении// *Кристаллография.* – 1990. – Т. 35. – С. 1047.

- [172]. В.П. Силин, А.А. Рухадзе, Электродинамические свойства плазмы и плазменноподобных сред, – Москва: ГосАтомИздат, 1961.
- [173]. D.R. Smith, J.B. Pendry, Homogenization of metamaterials by field averaging// J. Opt. Soc. Am. B. – 2006. – Vol. 23. – p. 391.
- [174]. O. Acher, J. Lerat, N. Malléjac, Evaluation and illustration of the properties of metamaterials using field summation // Optics express. – 2007. – Vol. 15. – p. 1096.
- [175]. M.G. Silveirinha, Casimir interaction between metal-dielectric metamaterial slabs: Attraction at all macroscopic distances, Phys. Rev. B. – 2010. – Vol. 82. – p. 085101.
- [176]. W. Lamb, D.M. Wood, N.W. Ashcroft, Long-wavelength electromagnetic propagation in heterogeneous media// Phys. Rev. B. – 1980. – Vol. 21. – p. 2248.
- [177]. S. Datta, C.T. Chan, K.M. Ho, and C.M. Soukoulis, Effective dielectric constant of periodic composite structures// Phys. Rev. B. – 1993. – Vol. 48. – p. 14936.
- [178]. A.A. Krokhin, P. Halevi, J. Arriaga, Long-wavelength limit homogenization for two-dimensional photonic crystals// Phys. Rev. B. – 2002. – Vol. 65. – p. 115208.
- [179]. A.P. Vinogradov, A.M. Merzlikin, On electrodynamics of one-dimensional heterogeneous system beyond homogenization approximation// NATO BOOK series – 2003. – p. 341.
- [180]. C.R. Simovski, Application of the Fresnel formulas for reflection and transmission of electromagnetic waves beyond the quasi-static approximation// Journal of Communications Technology and Electronics. – 2007. – Vol. 52. – p. 953.
- [181]. Ю.А. Рыжов, В.В. Тамойкин, В.И. Татарский, О пространственной дисперсии неоднородных сред// ЖЭТФ. – 1965. – Т. 48. – С. 656.

- [182]. Ю.А. Рыжов, В.В. Тамойкин, Среднее поле в среде с хаотическими анизотропными неоднородностями// Изв. вузов. Радиофизика. – 1966. – Т.9. – С.205.
- [183]. В. М. Филькинберг, Распространение волн в случайной среде// ЖТФ. – 1964. – Т. 34. – С. 509.
- [184]. L. Tsang, J.A. Kong, R.W. Newton, Application of strong fluctuation random medium theory to scattering of electromagnetic waves from a half-space of dielectric mixture// IEEE Trans. On Antennas and prop. – 1982. – Vol. 30. – p. 292.
- [185]. L. Tsang, J.A. Kong, Scattering of electromagnetic waves from random media with strong permittivity fluctuations// Radio Science. – 1981. – Vol. 16. – p. 303.
- [186]. J.C.M. Garnett, Colours in metal glasses and in metallic films// Phill. Trans. R. Soc. – 1904. – Vol. 203. – p. 385.
- [187]. J.C.M. Garnett, Colours in metal glasses, in metallic films and metallic solution// Phill. Trans. R. Soc. L. – 1906. – Vol. 205. – p. 237.
- [188]. D.A.Q. Bruggeman, Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. I. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen// Ann. Phys. Lpz. –1935. – Vol. 24. – p. 636.
- [189]. А.А. Брандт, Исследование диэлектриков на сверхвысоких частотах, – Москва: Физматгиз, 1963.
- [190]. A.N. Lagarkov, S.M. Matytsin, K.N. Rozanov, A.K. Sarychev, Dielectric properties of fiber-filled composites// J. Appl. Phys. – 1998. – Vol. 84. – p. 3806.
- [191]. C.B. Burckhardt, Diffraction of a Plane Wave at a Sinusoidally Stratified Dielectric Grating// J. Opt. Soc. Am. – 1966. – Vol. 56. – p. 1502.
- [192]. Л.А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, – Москва: Радио и связь. 1998.

- [193]. S. O'Brien, J.B. Pendry, Photonic band-gap effects and magnetic activity in dielectric composites // J. Phys.: Condens. Matter. – 2002. – Vol. 14. – p. 4035.
- [194]. D.R. Smith, S. Schultz, P. Markos, C.M. Soukoulis, Determination of effective permittivity and permeability of metamaterials from reflection and transmission coefficients // Phys. Rev. B. – 2002. – Vol. 65. – p. 195104.
- [195]. J. Zhou, T. Koschny, M. Kafesaki, C.M. Soukoulis, Size dependence and convergence of the retrieval parameters of metamaterials// Photon. Nanostruct. – 2008. – Vol. 6. – p. 96.
- [196]. A. Ludwig, K.J. Webb, Accuracy of effective medium parameter extraction procedures for optical metamaterials// Phys. Rev. B. – 2010. – Vol. 81. – p. 113103.
- [197]. A.K. Sarychev, D.J. Bergman, and Y. Yagil, Theory of the optical and microwave properties of metal-dielectric films// Phys. Rev. B. – 1995. – Vol. 51. – p. 5366.
- [198]. C. Fietz, G. Shvets, Current-driven metamaterial homogenization// Physica B. – 2010. – Vol. 405. – p. 2930.
- [199]. O. Acher, J. Lerat and N. Malléjac, Evaluation and illustration of the properties of metamaterials using field summation// Optics express. – 2007. – Vol. 15. – p. 1096.
- [200]. A.P. Vinogradov, A.V. Aivazyan, Scaling theory for homogenization of the Maxwell equations// Phys. Rev. E. – 1999. – Vol. 60. – p. 987.
- [201]. K.W. Whites, Full-wave computation of constitutive parameters for lossless composite chiral materials// IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1995. – Vol. 43. – p. 376.
- [202]. G. Franceschetti, A complete analysis of the reflection and transmission methods for measuring the complex permeability and permittivity of materials at microwave frequencies// Alta Freq. – 1967. – Vol. 36. – p. 757.

- [203]. X. Chen, T. M. Grzegorzczak, B.-I. Wu, J. Pacheco, and J.A. Kong, Robust method to retrieve the constitutive effective parameters of metamaterials// Phys. Rev. E. – 2004. – Vol. 70. – p. 016608.
- [204]. A.M. Nicolson and G.F. Ross, Measurement of the intrinsic properties of materials by time domain techniques// IEEE Trans. Instrum. Meas. – 1968. – Vol. 17. – p. 395.
- [205]. W.B. Weir, Automatic measurement of complex dielectric constant and permeability at microwave frequencies// Proc. IEEE. – 1974. – Vol. 62. – p. 33.
- [206]. W. Śmigaj, B. Gralak, Validity of the effective-medium approximation of photonic crystals// Phys. Rev. B. – 2008. – Vol. 77. – p. 235445.
- [207]. N.A. Enkin, A.M. Merzlikin, A.P. Vinogradov, The difference of the refraction laws in composite materials from the Fresnel laws// Journal of Communications Technology and Electronics. – 2010. – Vol. 55. – p. 565.
- [208]. A.P. Vinogradov, I.I. Skidanov, Generalization of Drude's formulas for the transition layer to chiral media// Journal of Communication Technology and Electronics. – 2002. – Vol. 47. – p. 517.
- [209]. C.R. Simovski, Material parameters of metamaterials// Optics and Spectroscopy. – 2009. – Vol. 107. – p. 726.
- [210]. A.P. Vinogradov, K.N. Rosanov, D.P. Makhnovsky, Effective boundary layer in composite material// Journal of Communication Technology and Electronics. – 1999. – Vol. 44. – p. 317.
- [211]. C.R. Simovski, B. Sauviac, On the bulk averaging approach for obtaining the effective parameters of thin magnetic granular films// European Physical Journal: Applied Physics. – 2002. – Vol. 17. – p. 11.
- [212]. C.R. Simovski, S.A. Tretyakov, Local constitutive parameters of metamaterials from an effective-medium perspective// Phys. Rev. B. – 2007. – Vol. 75. – p. 195111.

- [213]. C.R. Simovski, Bloch material parameters of magneto-dielectric metamaterials and the concept of Bloch lattices// *Metamaterials*. – 2007. – Vol. 1. – p. 62.
- [214]. В.М. Агранович, В.Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, – Москва: Наука, 1965.
- [215]. А.П. Виноградов, К вопросу о форме материальных уравнений в электродинамике// *УФН*. – 2002. – Vol. 172. – p. 363.
- [216]. T.B.A. Senior and J.L. Volakis, Approximate boundary conditions in electrodynamics, – London: The Institute of Electrical Engineers, 1995.
- [217]. D. Bedeaux, J. Vlieger, Optical properties of surfaces, – London: Imperial College Press. 2004.
- [218]. A.P. Vinogradov, A.I. Ignatov, A.M. Merzlikin, S.A. Tretyakov, and C.R. Simovski, Additional effective medium parameters for composite materials (excess surface currents)// *Optics Express*. –2011. – Vol. 19. – p. 6699.
- [219]. А.П. Виноградов, А.М. Мерзликин, Брэгговское отражение как механизм одномерной локализации света// *ДАН*. – 2004. – Т. 398. – p. 44.
- [220]. A.P. Vinogradov, A.M. Merzlikin, Frequency dependence of localization length of an electromagnetic wave in the one-dimensional system// *Physica B*. – 2003. – Vol. 338. – p. 126.